

**UNIVERSIDAD DE SANTANDER**

**ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS**

**DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS**

**DEPARTAMENTO DE ANALISIS DE LAS ESTRUCTURAS**

**CATEDRA DE CALCULO DE ESTRUCTURAS**

**CALCULO CONVENCIONAL DE  
ESTRUCTURAS. TEORIA  
ESTRUCTURAS RETICULADAS**

**PUBLICACION A.E. 82.2**

**AVELINO SAMARTIN QUIROGA**

**1982**

# I N D I C E

	<u>Página</u>
7. Estructuras reticuladas. Clasificación. Características de una barra.....	1
7.1. Definiciones.....	1
7.2. Hipótesis y simplificaciones.....	2
7.3. Planteamiento general del cálculo.....	5
7.3.1. Método de las fuerzas o hiperestáticas..	5
7.3.2. Métodos de los movimientos o equilibrio.	8
7.4. Características de una barra. Caso general de barra recta.....	16
7.4.1. Introducción.....	16
7.4.2. Concepto de rigidez a flexión de una barra.....	16
7.4.3. Concepto de coeficiente de transmisión..	17
7.4.4. Determinación de las rigideces y coeficientes de una barra. Caso general.....	19
7.4.5. Cálculo de las rigideces y coeficientes de transmisión de una barra.....	26
7.4.6. Momentos de empotramiento rígido.....	31
7.5. Características de barras no rectas.....	36
7.6. Características de barras con un extremo articulado.....	43
7.7. Ecuación constitutiva de una barra.....	47
Ejercicios. Enunciados.....	51
Ejercicios. Soluciones.....	56
8. Método de Cross. Estructuras intraslacionales.....	61
8.1. Planteamiento general del cálculo en movimientos	61
8.2. El método de Cross.....	68
8.2.1. Estructuras con un solo nudo activo.....	68

8.2.2. Estructura general.....	71
8.2.3. Simplificaciones en el método de Cross.....	81
8.3. Estructuras simétricas.....	89
8.3.1. Introducción.....	89
8.3.2. Cargas simétricas.....	91
8.3.3. Cargas antimétricas.....	98
8.3.4. Cargas arbitrarias.....	108
8.4. Determinación de movimientos.....	109
8.5. Estructuras bajo acciones representadas por movimien- tos y deformaciones impuestas.....	116
8.6. Casos especiales. Barras con articulaciones interme- dias.....	125
Ejercicios. Enunciados.....	131
Ejercicios. Soluciones.....	140
9. Método de Cross. Estructura traslacional.....	150
9.1. Definiciones.....	150
9.2. Cálculo de estructuras traslacionales.....	161
9.2.1. Introducción.....	161
9.2.2. Etapas del cálculo.....	161
9.3. Estructuras bajo acciones cinemáticas.....	189
9.4. Estructuras no sustentadas.....	196
9.5. Consideración de la deformación por axil en las es- tructuras reticuladas.....	202
9.5.1. Introducción.....	202
9.5.2. Esfuerzos secundarios en las estructuras ar- ticuladas.....	203
9.5.3. Estructuras reticulares con barras elongables	206
9.6. Subestructuras.....	230
Ejercicios. Enunciados.....	243
Ejercicios. Soluciones.....	266

10. Líneas de influencia en estructuras entramados.....	275
10.1. Introducción.....	275
10.2. Método de los esfuerzos unitarios.....	280
10.2.1. Consideraciones previas.....	280
10.2.2. Estructuras intraslacionales. Método de los momentos 100.....	281
10.2.3. Estructuras traslacionales. Método de las acciones 100 .....	296
10.3. Aplicación del teorema de la reciprocidad o de Max- well.....	305
10.3.1. Consideraciones generales.....	305
10.3.2. Líneas de influencia de movimientos y defor- maciones.....	306
10.3.3. Líneas de influencia de esfuerzos y reaccio- nes. Estructura liberada.....	307
10.3.4. Líneas de influencia de esfuerzos y reaccio- nes. Método dual.....	316
10.4. Análisis comparativo entre los distintos métodos de determinación de líneas de influencia.....	323
Ejercicios. Enunciados.....	325
Ejercicios. Soluciones.....	344





## 7. ESTRUCTURAS RETICULADAS. CLASIFICACION. CARACTERISTICAS DE UNA BARRA

### 7.1. Definiciones

Se denomina estructura entramado a un sistema de barras rectas o curvas (elementos monodimensionales) enlazadas elásticamente entre sí en unos puntos denominados nudos. Si las cargas actuantes se encuentran situadas en un plano, que contiene asimismo a todos los elementos lineales o barras de la estructura, ésta se denomina entramado plano. Frecuentemente, en este caso, como las piezas son rectas y forman mallas rectangulares o trapeziales e incluso triangulares, también recibe el nombre de estructura reticulada plana.

Por lo tanto, y a diferencia de las estructuras articuladas, los nudos en las estructuras reticuladas son rígidos y no permiten movimientos relativos; en particular, la diferencia de giros entre las barras concurrentes en el nudo. Este hecho implica que las barras pueden recibir esfuerzos de flexión, incluso con cargas actuando en los nudos, debido a las reacciones al giro que existen en los extremos de las barras. En realidad suele ser dominante el trabajo de flexión en este tipo estructural.

En las estructuras reticulares, a diferencia de las articuladas, el peso propio es importante y a veces influye de un modo más considerable que las sobrecargas.

Un conjunto muy importante de entramados corresponde a las estructuras que aparecen en edificación, las cuales constan de una serie de pórticos principales unidos horizontalmente, a los niveles de las distintas plantas, por los forjados. Es usual tratar el cálculo de cada pórtico principal de un modo aislado, al

menos bajo cargas gravitatorias, si bien actualmente, mediante procedimientos de cálculo por computador, es posible el análisis de la estructura tridimensional sin un esfuerzo computacional elevado. (Figura 7.1).

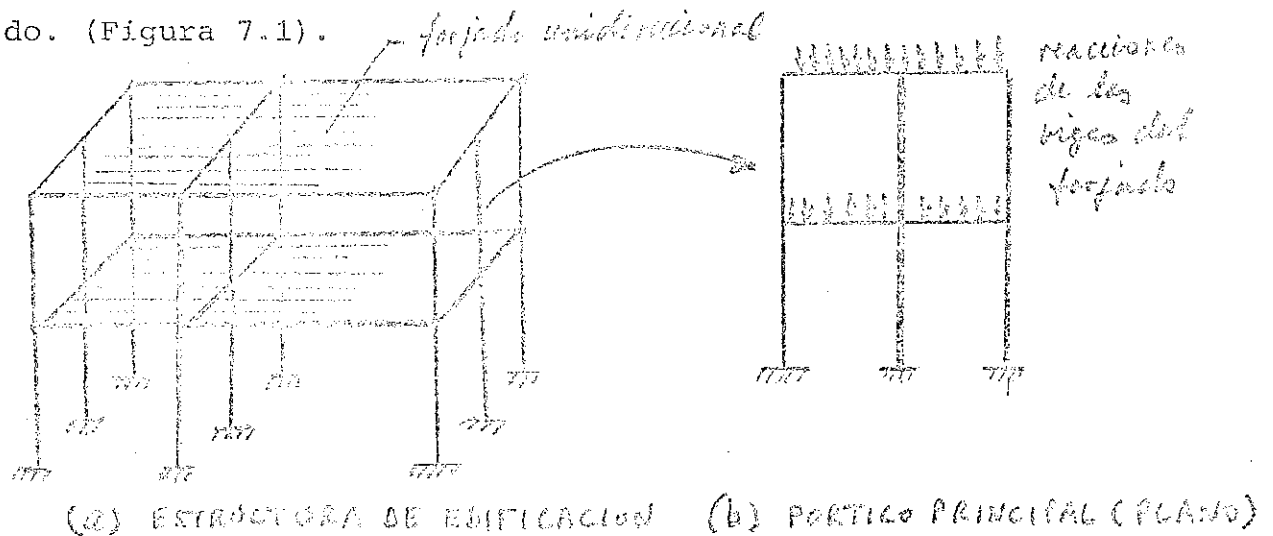


Figura 7.1. Estructuras reticuladas.

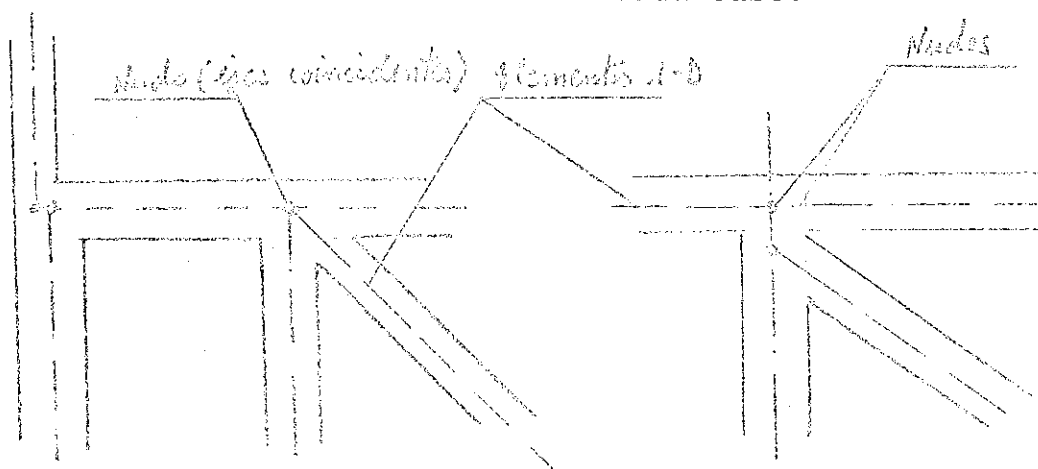
## 7.2. Hipótesis y simplificaciones

El cálculo de entramados planos se llevará a cabo dentro de la teoría lineal de cálculo de estructuras: material que sigue la ley de Hooke y pequeños movimientos y deformaciones. Además se consideran las siguientes hipótesis adicionales:

- (a) La elongabilidad de todas las barras se supone nula, es decir  $\frac{\epsilon}{E\sigma} = 0$ . Esta hipótesis equivale a admitir que la deformación por esfuerzo axial es nula(\*) y la longitud de las barras es por lo tanto invariable. Salvo que expresamente se indique lo contrario, esta hipótesis se supondrá en todo el análisis que sigue.
- (b) Se admite que las directrices de las barras concurren en un punto o nudo, y que, por consiguiente, no existe el tipo de excentricidad indicado en la figura 7.2. Sin embargo

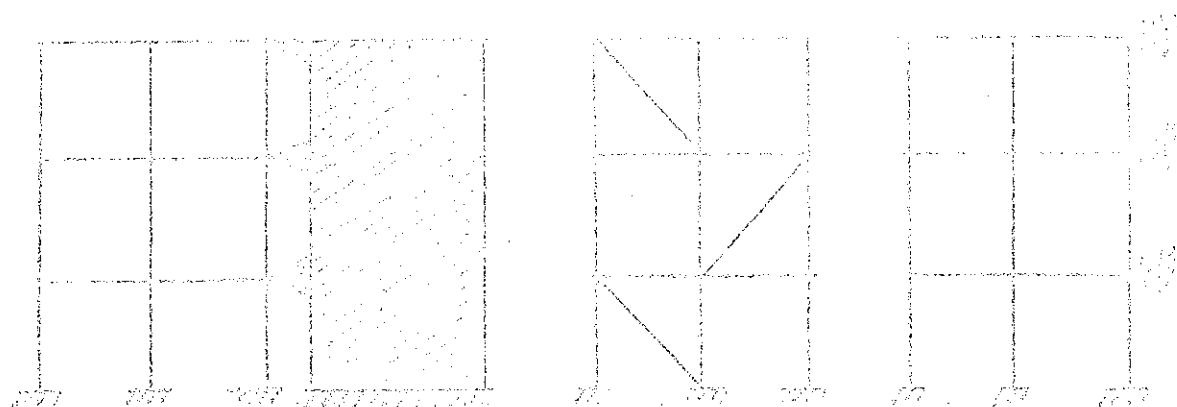
(\*)NOTA: La deformación de cortante se suele también despreciar de un modo análogo a como se ha indicado en el cálculo de las estructuras articuladas, ya que las piezas son lo suficientemente esbeltas y de sección maciza.

situaciones de articulación de una barra al acometer a un nudo sí serán consideradas en cada caso.



## 7.2. Concurrencia puntual de directrices.

La hipótesis (a) permite simplificar de un modo drástico el cálculo de estas estructuras en numerosos casos. Por ejemplo, si en las estructuras de edificación existe un muro importante - que coarta los movimientos horizontales de una estructura y los verticales están impedidos mediante los pilares verticales, los nudos de la estructura sólo pueden girar, y se denomina intraslacional. Es posible conseguir la intraslacionalidad de la estructura si existen barras en triangulación, o bien, la caja del ascensor es importante y a través del forjado fija nudos de cada planta; así, al ser las barras inextensibles, se obtiene una estructura - con nudos indesplazables. (Figura 7.3). El caso general de impedimento del movimiento horizontal de los nudos se suele idealizar mediante la introducción de apoyos, como se indica en la figura - 7.3. (c).



(a) For nudo importante

(b) Triangulación

(c) Apoyos  
(Caso 3.1.1.1)

## 7.3. Estructuras intraslacionales.

Es interesante, normalmente, proyectar estructuras intras\_lacionales puesto que, aparte de facilitar el cálculo, se encuentran sometidas a esfuerzos menores que en el caso general de estructuras traslacionales.

Las hipótesis (a) y (b) anteriores pueden, en ciertos casos, apartarse de la realidad y deben ser por lo tanto reconsideradas de acuerdo con las ideas que se estudiarán mas adelante. Así, en el caso de edificios altos, la carga axil sobre los soportes - puede ser muy importante y el movimiento vertical de los mismos - (producido por su deformación) debe ser tenido en cuenta, particularmente si la sección de soportes contiguos es muy diferente. En este caso, aparecen movimientos diferenciales que pueden inducir importantes flexiones en las vigas dinteles. Por otra parte, en el caso de dimensiones importantes de vigas y pilares puede ser inevitable la aparición de las excentricidades en la intersección de directrices o al menos la consideración del encuentro de piezas no debe ser reducida a un punto, siendo preciso incluir en el cálculo el tamaño del nudo (nudos de dimensión finita).

En este orden de ideas, sucede normalmente que barras con cambios bruscos de sección, no son estrictamente barras rectas (figura 7.4a) y aparece en ellas la problemática de la no coincidencia de directrices de las vigas componentes. Sin embargo, si el cambio brusco de sección no es muy fuerte (\*), se suele, en el cálculo de esfuerzos de la estructura, suponer la pieza recta (figura 7.4b), lo que supone una aproximación normalmente suficiente para la determinación de esfuerzos, pero no así en la comprobación de tensiones, para la cual la realidad del salto de secciones debe ser considerada explícitamente. Situación análoga, y más frecuente, por adaptarse más adecuadamente a las necesidades tensionales, corresponde a la representada en las figuras (7.4.c y 7.4.d). Exis

NOTA(\*): Se indica a veces los valores límites de  $1/4$  para la relación luces y  $1/2$  para la de cantos de una barra con cartabones.

ten a veces situaciones de vigas con variaciones suaves de sección que podrían ser tratadas como arcos rebajados y que, no obstante, se consideran rectas para el cálculo de esfuerzos. Como entonces, la curvatura de la directriz debe de ser explícitamente tenida en cuenta en la evaluación de las tensiones (efecto Resal de disminución del cortante por ejemplo).

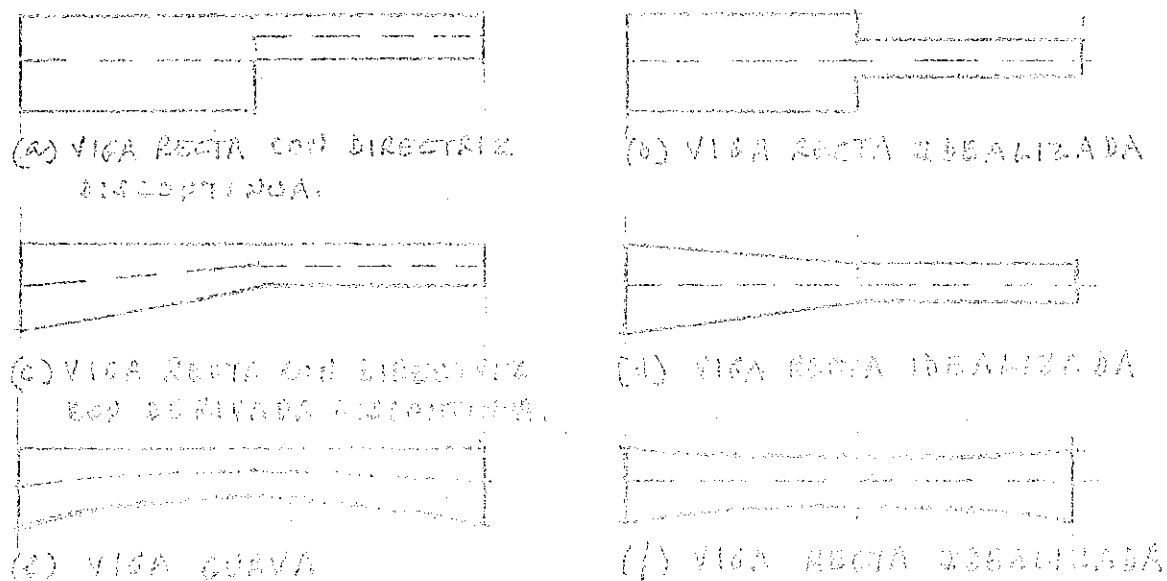


Figura 7.4. Idealización de vigas rectas.

### 7.3. Planteamiento general del cálculo

#### 7.3.1. Método de las fuerzas o hiperestáticas

El cálculo de una estructura reticulada intenta resolver esencialmente el mismo problema que el de una estructura general. Conocidas las acciones (fuerzas, esfuerzos, deformaciones y movimientos impuestos) en los gdl de la estructura, se desea obtener la respuesta estructural, medida en el conocimiento de las correspondientes magnitudes duales (movimientos, deformaciones, esfuerzos y fuerzas reacciones) incógnitas.

Si en el cálculo de este tipo de estructuras se utilizase un método de las fuerzas o hiperestáticas, como en el caso de las estructuras articuladas, se podría estudiar el equilibrio de cada nudo y barra de la estructura. Para ello se adoptan como incógnitas básicas las reacciones que el resto de la estructura

ejerce sobre cada uno de los extremos, i y j, de cada barra (figura 7.5).

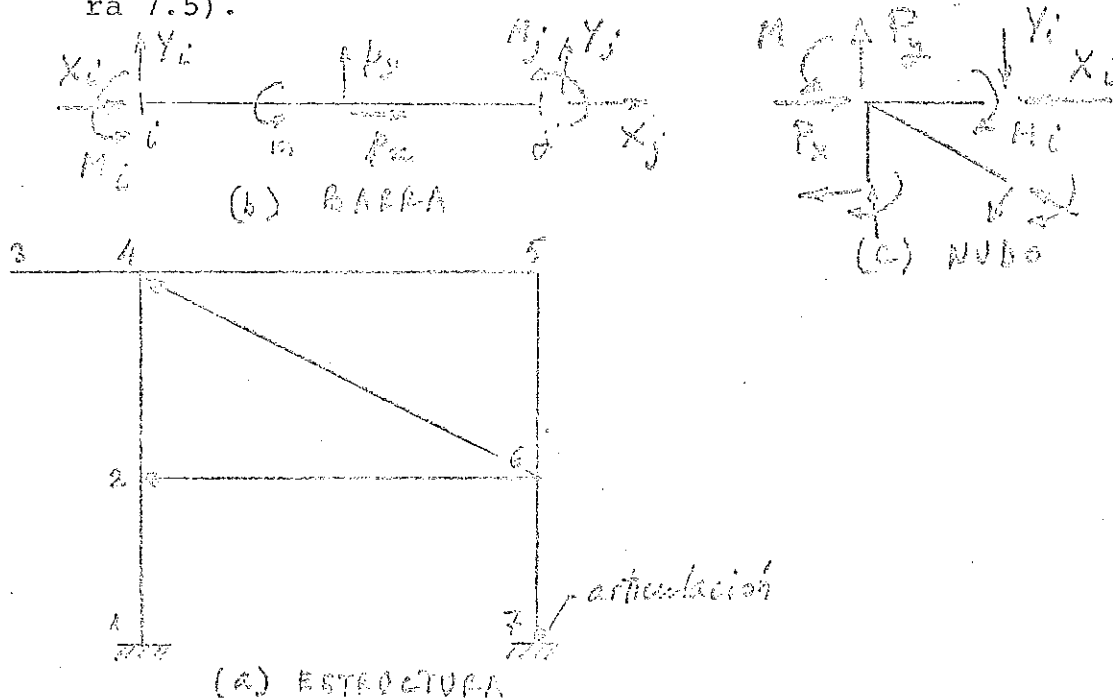


Figura 7.5. Ecuaciones de equilibrio de una estructura.

El número total de incógnitas  $I$  en el caso de un entramado plano con  $N$  nudos y  $B$  barras es:

$$I = 6B + C \quad (7.1)$$

siendo  $C$  el número de coacciones al movimiento. Evidentemente, si en el extremo de una barra existe una liberalización (articulación, rótula, etc.) y el número total de ellas es  $L$ , la fórmula (7.1) debe de modificarse, puesto que no existen las reacciones correspondientes sobre cada barra. Resulta, de esta forma, la expresión:

$$I = 6B + C - L \quad (7.2)$$

Por otra parte el número de ecuaciones  $E$  que proporciona la estática es:

Tres ecuaciones por barra correspondiente a la anulación de los dos componentes de la fuerza (generalmente según la dirección de

la recta que une sus extremos y su perpendicular) y el momento, es decir, para la barra i-j de la figura 7.5(b).

$$\Sigma p_x + X_i + X_j = 0$$

$$\Sigma p_y + Y_i + Y_j = 0 \quad (7.3)$$

$$\Sigma m + \Sigma p_x(b-y) + \Sigma p_y(x-a) + X_i(b-y_i) + (b-y_j) + Y_i(x_i-a) + Y_j(x_j-a) + M_i + M_j = 0$$

con x, y coordenadas del punto de aplicación de la carga ( $p_x, p_y$ ) y (a,b) coordenadas del punto respecto al cual se toman momentos.

En cada nudo existen asimismo tres ecuaciones de equilibrio (dos de anulación de las fuerzas según dos direcciones y otra de momentos, que aparece ahora, contrariamente al caso de estructuras articuladas, al ser el nudo, en general, rígido). Por lo tanto, se deduce el siguiente número total de ecuaciones disponibles:

$$E = 3N + 3B \quad (7.4)$$

Si no se consideraran situaciones críticas, debidas a los valores geométricos (posición de apoyos, coordenadas de los nudos y disposición de liberalizaciones, etc.) se puede establecer que en una estructura estable (no mecanismo) el número de incógnitas no debe ser inferior al de ecuaciones. Matemáticamente, se debe satisfacer la condición  $E \geq I$

$$\text{o bien} \quad B \geq N + \frac{L-C}{3} \quad (7.5)$$

El grado de hiperestatismo  $\alpha$  de la estructura vendría medido por la cantidad

$$\alpha = I - E = 3B - 3N + C - L \quad (7.6)$$

Ejemplo 7.1. El grado de hiperestaticidad de la estructura representada en la figura 7.5(a) es:



El número de nudos  $N = 7$

El número de coacciones  $C = 5$  correspondientes a los nudos 1(3) y 7(2).

El número de liberalizaciones  $L = 2$ , que corresponde al nudo extremo 4 de la barra 4-6 (1) y al nudo 2 de la barra 2-6 (1).

Por último, el número de barras es 8.

La estructura es estable, ya que  $8 \geq 7 + \frac{5-5}{3}$  y el grado de hiperestatismo es, según fórmula (7.6):

$$\alpha = 24 - 21 + 5 - 2 = 6$$

En el nudo 7 podría ser considerada una liberalización (articulación de la barra) y el nudo empotrado o, como se ha considerado en el ejemplo, una coacción menor en el nudo. En ambos casos se deduce el mismo valor de  $L-C$ .

### 7.3.2. Métodos de los movimientos o equilibrio.

Se comprende, tras las consideraciones del apartado precedente, que incluso en el caso de estructuras sencillas, con un número reducido de vanos y plantas, el grado de hiperestatismo es elevado, por lo que no es posible llevar a cabo un cálculo mediante métodos convencionales basados en el procedimiento de las fuerzas (análogo al aplicado en estructuras articuladas). Además, numerosas hipótesis de carga deben de ser consideradas en el cálculo. En efecto, normalmente es preciso determinar los valores extremos más desfavorables de los esfuerzos, y movimientos máximos y mínimos en las distintas secciones características de la estructura, bajo la acción de cargas móviles, lo que implica un esfuerzo de computación considerable. Históricamente, esta dificultad de cálculo se dejó sentir principalmente a partir de la construcción de las primeras estructuras entramados a finales del siglo pasado, como consecuencia natural de la utilización intensiva del hormigón

armado como material estructural. Antes, a principios de siglo pasado, fueron las construcciones metálicas que, sustituyendo a las de fábrica, exigieron la creación de los métodos de cálculo eficientes de las estructuras específicas que originaron (celosías de barras articuladas en los nudos). Sin embargo, estos procedimientos de análisis de estructuras, basados en el método de las hiperestáticas, se mostraron incapaces en su aplicación práctica al cálculo de estructuras reticuladas con un elevado grado de hiperestatismo. No fue hasta época relativamente reciente, en la década de los treinta, cuando Hardy Cross expuso su conocido procedimiento de cálculo de este tipo de estructuras reticuladas, basado en la resolución, de un modo iterativo, de las ecuaciones de equilibrio resultantes de un planteamiento en movimientos. Posteriormente han surgido numerosas variantes del método de Cross (Kani, Torroja, con su técnica de los grados de empotramiento, etc). Aquí sólo se expondrá, con algún detalle, el método de Cross, cuya sencillez de aplicación y grado de intuición <sup>recapitulado</sup> que conlleva lo hace especialmente conveniente, a efectos didácticos, para la obtención de un entendimiento adecuado del modo de trabajo de los entramados planos. Al corresponder el método de Cross a un esquema que adopta los movimientos como incógnitas básicas, se comprende la importancia de considerar un número reducido de movimientos. Por ello, la hipótesis de elongabilidad de las barras nula supone una restricción importante en los desplazamientos de la estructura y constituye una simplificación conveniente. Al caso en que los desplazamientos de los nudos de la estructura se consideran nulos (estructuras intraslacionales) corresponde a la situación más simplificada del método de Cross y a ella se hará referencia en primer lugar.

El método de Cross, en esencia, permite calcular de un modo sencillo -mediante aproximaciones sucesivas- las acciones  $M_i$  y  $M_j$  sobre cada barra, en sus extremos  $i$  y  $j$ , correspondientes al efecto del resto de la estructura sobre ella (figura 7.5b). Sin embargo, el cálculo de una estructura implica el conocimiento de las leyes de esfuerzos y movimientos en todas las secciones de la misma, puesto que en el caso de hormigón armado se suele disponer las armaduras (barras longitudinales y estribos) de acuerdo con estas leyes, y en las estructuras metálicas es frecuente proyec

tar su resistencia mediante el uso adecuado de platabandas y una variación longitudinal de la sección.

La determinación de las restantes acciones de la estructura sobre la barra  $(Y_i, Y_j, X_i \text{ y } X_j)$  se lleva a cabo como sigue:

- (1) Las fuerzas (normales a la recta  $r$  que une los extremos de la barra)  $Y_i, Y_j$ , se deducen independientemente para cada barra mediante las ecuaciones de equilibrio (7.3), en particular, - de la condición de nulidad de la resultante según la dirección de la normal a la recta  $r$  y del momento de las fuerzas respecto a un punto arbitrario.
- (2) Por el contrario, las fuerzas  $X_i, X_j$  no se pueden deducir independientemente para cada barra de las condiciones de equilibrio (7.3), ya que sólo existe una condición de equilibrio de las fuerzas respecto a la dirección  $r$ . Son precisas nuevas condiciones. Estas se obtienen del equilibrio de fuerzas de cada nudo (el equilibrio de momentos en cada nudo automáticamente se satisface como consecuencia del cálculo de Cross, como se verá más adelante). Para que esta determinación de las acciones  $X_i, X_j$  sobre cada barra sea posible, es preciso que la estructura sea isostática considerada como una celosía. - En el caso de que constituya un mecanismo, la estructura es traslacional o de nudos desplazables cuyo estudio se post pone a posteriores capítulos, ya que, entonces, no sólo los momentos  $M_i, M_j$  deben de equilibrarse en un nudo, sino también las fuerzas  $Y_i, Y_j$ . Por el contrario, si es hiperestática, no es posible deducir con las condiciones de la estática el cálculo de estas acciones  $X_i, X_j$ , siendo preciso recurrir a condiciones de compatibilidad, en desplazamientos, cuyo planteamiento contradice la hipótesis de barras infinitamente rígidas a extensión (elongabilidad nula,  $\frac{L}{E\Omega} = 0$ ).

Se comprueba que el número de incógnitas existentes corresponde a dos por barra  $(X_i, X_j)$  y un número de coacciones de desplazamientos (giros no se consideran)  $C_1$ , es decir

$$I = 2B + C_1 \quad (7.7)$$

El número de ecuaciones de equilibrio existentes es una por barra más las dos de equilibrio de cada nudo, por lo tanto;

$$E = B + 2N \quad (7.8)$$

La situación  $E = I$ , implica (salvedad hecha de situaciones de geometría crítica) la posibilidad del cálculo de las acciones  $X_i$ ,  $X_j$ , es decir, cuando se cumple la condición de isostatismo de las estructuras triangulares planas.

$$B = 2N - C_1 \quad (7.9)$$

Un modo cómodo de obtención de las acciones  $X_i$ ,  $X_j$  sobre cada barra consiste en comenzar por el equilibrio de un nudo, no coaccionado, en el que concurren únicamente dos barras. De esta forma, las reacciones  $X_i$ ,  $X_j$  pueden obtenerse en los extremos de las barras coincidentes con el nudo y, mediante equilibrio de éstas, deducir los valores de las acciones  $X_i$ ,  $X_j$  en los extremos opuestos. A continuación se plantea el equilibrio sucesivamente en los distintos nudos y según un orden tal que en cada nudo sólo existan dos incógnitas (o barras con reacciones sin determinar). Se observa - que esta técnica de cálculo se asemeja al procedimiento de Cremona comentado en anteriores capítulos.

Una vez determinadas las reacciones actuantes sobre todas las barras, es posible obtener la ley de esfuerzos existentes en cada una de ellas. En efecto, se deduce, mediante las ecuaciones elementales de la Resistencia de Materiales, las siguientes expresiones de los esfuerzos, para cada uno de los grupos de cargas que se indican y según los criterios de signos representados en la figura (7.6):

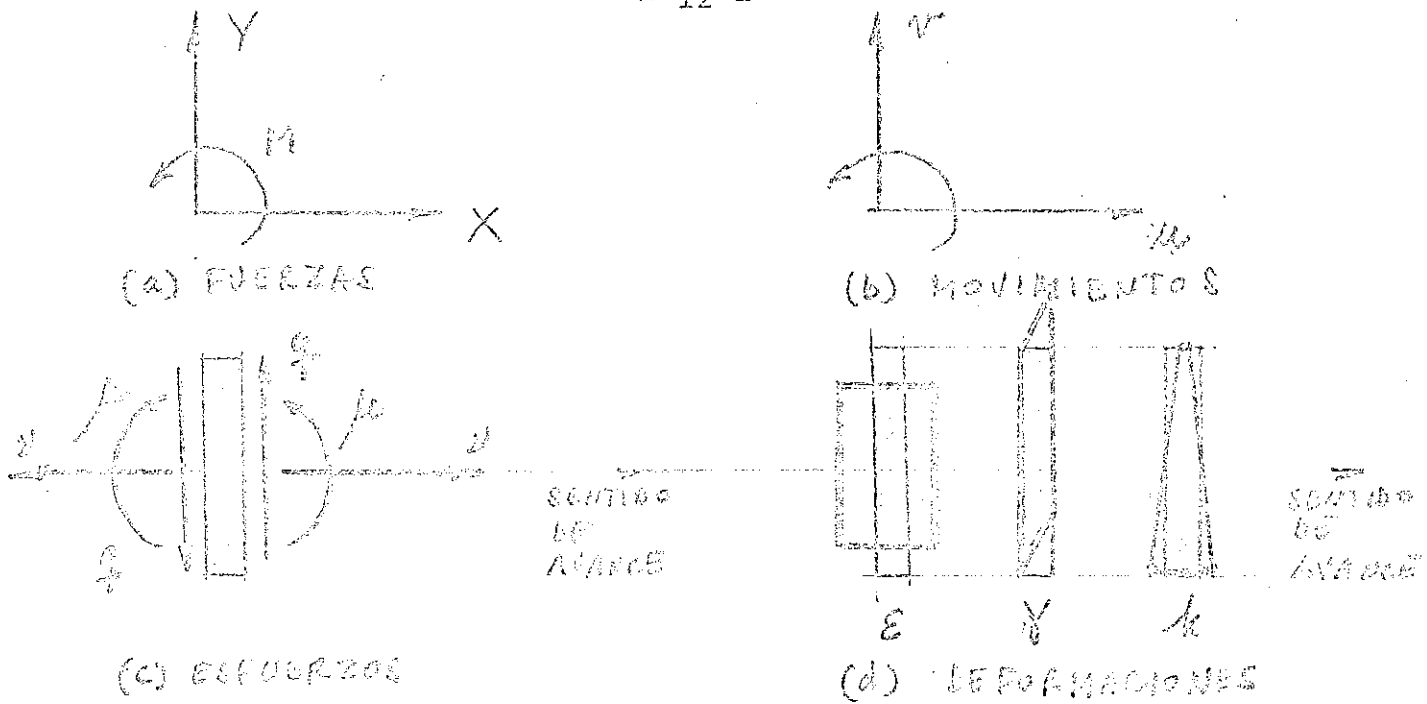


Figura 7.6. Convenio de signos positivos en el cálculo de las estructuras reticuladas.

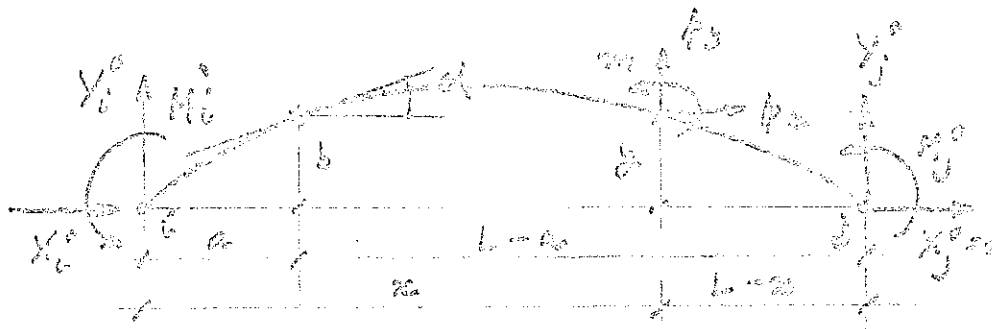


Figura 7.7. Acciones sobre las barras (isóstáticas).

(a) Cargas actuantes en la barra (figura 7.7).

Los esfuerzos en la sección ( $x = a$ ,  $y = b$ ) son:

$$\begin{aligned}
 v_a^0 &= \int_a^L \{m + p_y(x - a) + p_x(b - y)\} ds + Y_j^0(L - a) \\
 q_a^0 &= \int_a^L (-p_x \operatorname{sen} \alpha + p_y \operatorname{cos} \alpha) ds + Y_j^0 \operatorname{cos} \alpha \\
 v_a^0 &= \int_a^L (p_x \operatorname{cos} \alpha + p_y \operatorname{sen} \alpha) ds + Y_j^0 \operatorname{sen} \alpha
 \end{aligned} \quad (7.10)$$

en donde

$$Y_j^0 = -\frac{1}{L} \int_0^L (m + p_y x - p_x y) ds$$

$$Y_i^0 = -Y_j^0 + \int_0^L p_y ds \quad (7.11)$$

$X_i^0 + X_j^0 = -\int_0^L p_x ds$  y se considera  $X_j^0 = 0$  en este estado isostático de cargas.

(b) Cargas procedentes de las acciones hiperestáticas - (deducidas del método de Cross). (Figura 7.8).

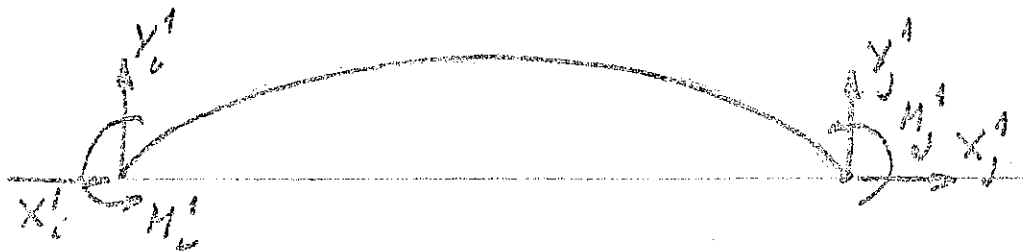


Figura 7.8. Acciones de cálculo de Cross (hiperestáticas).

Los esfuerzos en la sección  $x=a$ ,  $y=b$  son:

$$\begin{aligned} \mu_a^1 &= M_j^1 + Y_j^1 (L - a) - X_j^1 b = M_j^1 \frac{a}{L} - M_i^1 (1 - \frac{a}{L}) - X_j^1 b \\ q_a^1 &= -X_j^1 \operatorname{sen} \alpha + Y_j^1 \operatorname{cos} \alpha = -X_j^1 \operatorname{sen} \alpha - \frac{M_j^1 + M_i^1}{L} \operatorname{cos} \alpha \quad (7.12) \end{aligned}$$

$$v_a^1 = X_j^1 \operatorname{cos} \alpha + Y_j^1 \operatorname{sen} \alpha = X_j^1 \operatorname{cos} \alpha - \frac{M_j^1 + M_i^1}{L} \operatorname{sen} \alpha$$

siendo

$$M_i^1 \text{ y } M_j^1 \quad (7.13)$$

los resultados del cálculo de Cross .

$$Y_j^1 = -Y_i^1 = \frac{M_j^1 + M_i^1}{L}$$

las fuerzas que equilibran la barra ante los momentos anteriores.

$$X_j^1 = -X_i^1 = X \quad (7.15)$$

la acción incógnita que se determina mediante el equilibrio de todos los nudos de la estructura.

Los esfuerzos definitivos, son directamente la suma de ambos, es decir

$$\begin{aligned} \mu_a &= \mu_a^0 + \mu_a^1 \\ q_a &= q_a^0 + q_a^1 \\ v_a &= v_a^0 + v_a^1 \end{aligned} \quad (7.16)$$

y los valores de las reacciones de la estructura sobre la barra son:

$$\begin{aligned} X_i &= X_i^0 + X_i^1 & ; & & X_j &= X_j^0 + X_j^1 \\ Y_i &= Y_i^0 + Y_i^1 & ; & & Y_j &= Y_j^0 + Y_j^1 \\ M_i &= M_i^1 & ; & & M_j &= M_j^1 \end{aligned} \quad (7.17)$$

En el caso de barra recta las expresiones anteriores se simplifican en las siguientes, correspondientes a la sección x:

$$\begin{aligned} \mu_x &= -M_j \frac{x}{L} - M_i \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \mu_x^0 \\ q_x &= - \frac{M_j + M_i}{L} + q_x^0 \\ v_x &= v_x^0 + X \end{aligned} \quad (7.18)$$

Se observa que se cumplen las siguientes igualdades, en los extremos de la barra:

$$\begin{aligned} \text{Extremo i: (a=0)} \quad \mu_a &= -M_i \\ q_a &= -Y_i \\ v_a &= -X_i \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} \text{Extremo j: (a=L)} \quad \mu_a &= M_j \\ q_a &= Y_j \\ v_a &= X_j \end{aligned} \quad (7.20)$$

Teniendo en cuenta las igualdades anteriores, se suelen obtener gráficamente en la práctica las leyes de esfuerzos en barras rectas para los casos más sencillos de carga, según se indica en la figura 7.9; dentro de la aproximación normalmente requerida:

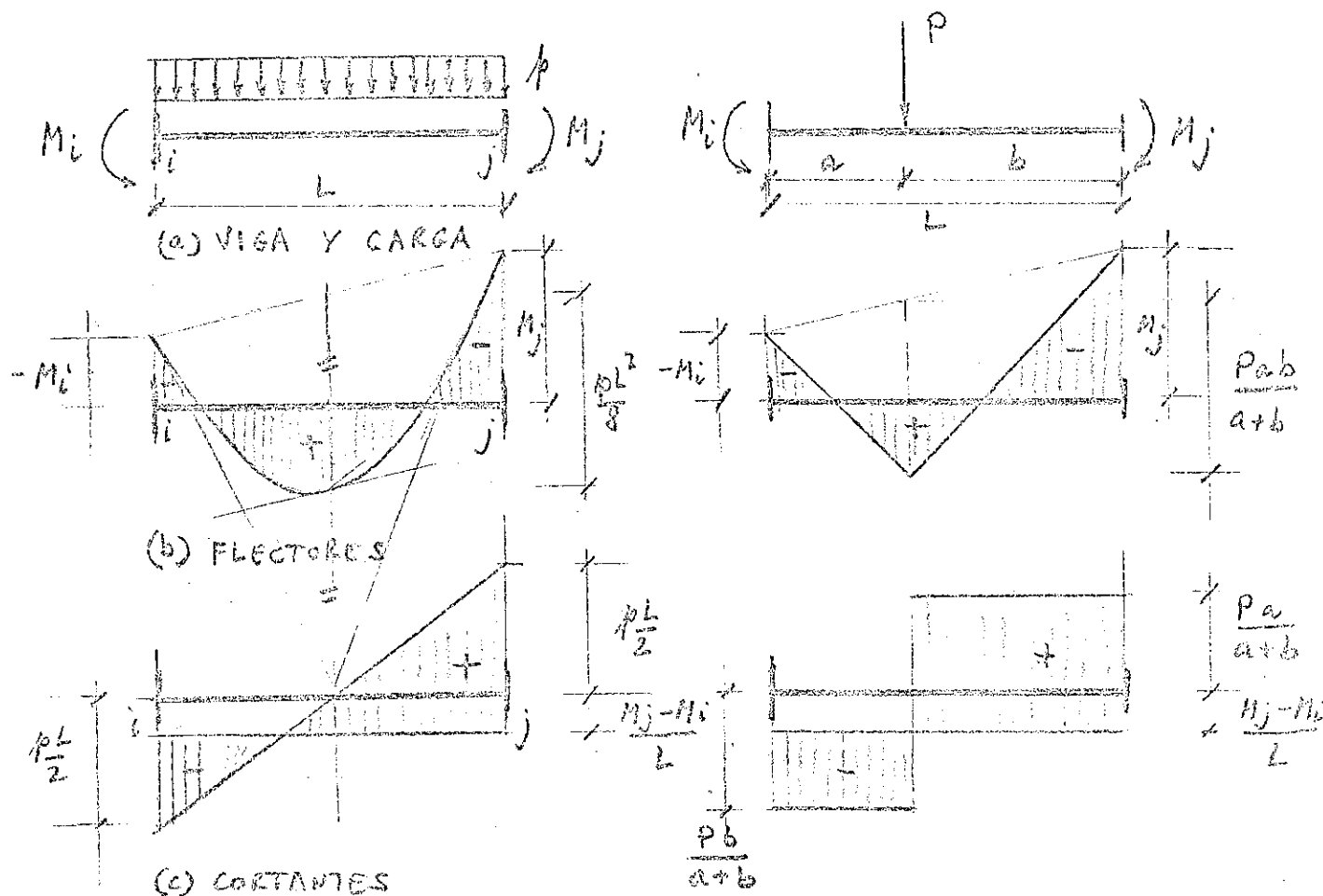


Figura 7.9. Obtención de las leyes de esfuerzos.

Se deduce de la exposición anterior que, al menos en las estructuras estrictamente intraslacionales (sus nudos sólo son susceptibles de movimientos giros, y satisfacen la condición 7.9), es suficiente el conocimiento de las acciones hiperestáticas  $M_i$  y  $M_j$ , para la determinación completa de todas las leyes de esfuerzos en las barras de la estructura.



En lo que sigue se expone el método de Cross, que permite calcular los momentos  $M_i$  y  $M_j$  producidos por la coacción de los nudos extremos sobre la barra  $i-j$ , cuando actúa un conjunto de fuerzas arbitrarias sobre la estructura. Para ello, es preciso introducir una serie de conceptos previos que se exponen en el siguiente apartado.

*Para  
ejemplo*

#### 7.4. Características de una barra. Caso general de barra recta

##### 7.4.1. Introducción

Antes de iniciar el cálculo específico del método de Cross y, en general, de cualquier otro procedimiento de aproximaciones sucesivas, es preciso conocer los valores de unas magnitudes que dependen únicamente de la geometría (curva directriz, variación longitudinal de la sección, etc.) y material de la barra, es decir, son intrínsecas a la misma. Estas son las rigideces y los coeficientes de transmisión. También es necesario obtener los esfuerzos de empotramiento rígido, que dependen, además de las características intrínsecas de la barra, de su carga actuante.

##### 7.4.2. Concepto de rigidez a flexión de una barra

En general, si en una estructura se coaccionan todos los gdl excepto uno, que se somete a una carga unidad, el movimiento - evidentemente eficaz con la carga - que se produce se denomina flexibilidad de la estructura en ese gdl. Este concepto fue utilizado en capítulos anteriores en el cálculo de las estructuras articuladas, y su valor se comprueba que es independiente del nudo extremo de la barra que se liberaliza, ya que la reacción  $T'$  (figura - 7.9) tiene también valor unidad. Para las barras recta y curva las flexibilidades se obtenían de las fórmulas respectivas:

$$f = \int_0^L \frac{dx}{EI}$$

$$f = \int_0^{\alpha} \left( \frac{\cos^2 \alpha}{E \Omega} + \frac{e^2}{EI} \right) ds$$

En un cálculo en movimientos, como el que se desarrolla en el método de Cross, es más conveniente utilizar las magnitudes inversas a las flexibilidades, es decir, rigideces. Esta se define como la fuerza que es preciso ejercer en el gdl de una estructura con todos los restantes gdl coaccionados para producir un movimiento unidad. En general, la rigidez de una estructura depende del gdl que se considere. En el caso simple de una barra biarticulada a extensión, la rigidez es independiente del gdl (nudo) considerado, y su valor es inverso de la flexibilidad.

La aplicación de las ideas anteriores a los gdl correspondientes a los movimientos de giro de una viga biempotrada es inmediata (figura 7.10). En este caso, no obstante, la rigidez depende del gdl (nudo) que se considere en el caso de barra no simétrica. Así, se define la rigidez a flexión  $R_i$ , en el nudo extremo  $i$ , de una barra biempotrada (\*), como la relación entre el momento que se aplica en dicho nudo, supuesto liberalizado al giro (articulado), y la rotación que sufre, es decir,

$$R_i = \frac{M_i}{\theta_i} \quad (i = 1, 2) \quad (7.21)$$

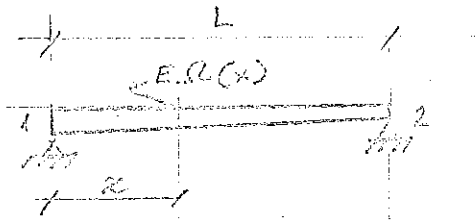
Las dimensiones de la rigidez son de fuerza por longitud (momento).

#### 7.4.3. Concepto de coeficiente de transmisión

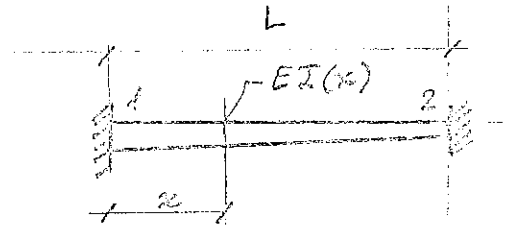
En la barra articulada en un extremo  $i$  y empotrada en el opuesto  $j$ , se ha definido la rigidez en  $i$  como la relación entre un momento actuante  $M_i$  y el giro  $\theta_i$  que se produce. En esta situación, en el extremo opuesto  $j$  aparece un momento, reacción de empotramiento, que se designa por  $M'_j$ . Se denomina coeficiente de transmisión  $\gamma_{ij}$  a la relación (figura 7.10).

$$\gamma_{ij} = \frac{M'_j}{M_i} \quad (7.22)$$

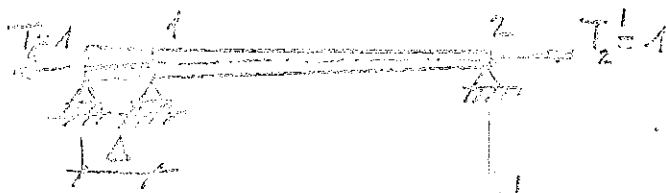
NOTA (\*): Con objeto de indicar la dirección de avance considerada en la barra, se designan por 1 y 2 los nudos extremos, anterior y posterior de la barra. Se utilizará en los sucesos esta numeración local (1-2) o bien la global (i-j) según el caso.



(a) Barra articulada.

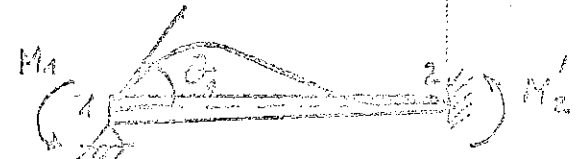


(b) Barra biarticulada.



$$k = \frac{\Delta}{T} = \frac{\Delta}{(T=1)} = \int_0^L \frac{dx}{E A(x)}$$

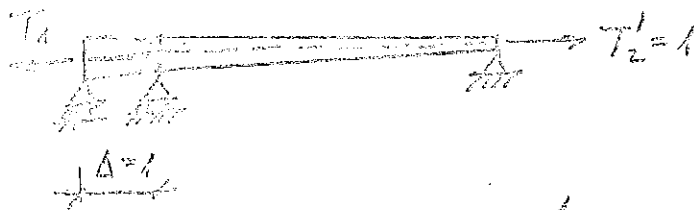
(c) Barra libre-ata, Flexibilidad



$$R_1 = \frac{M_1}{\theta_1} = \frac{M_1}{(\theta_1=1)}$$

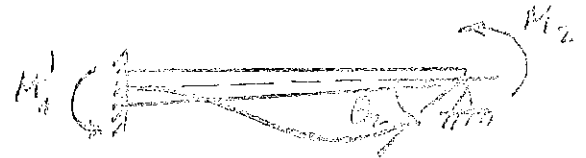
$$r_{12} = \frac{M_2}{M_1}$$

(d) Barra libre-ata, Rigidez



$$k = \frac{T}{\Delta} = \frac{T_1}{(\Delta=1)} = \frac{1}{\int_0^L \frac{dx}{E A(x)}}$$

(e) Barra libre-ata, Rigidez



$$R_2 = \frac{M_2}{\theta_2} = \frac{M_2}{\theta_2=1}$$

$$r_{21} = \frac{M_1}{M_2}$$

(f) Barra libre-ata, Rigidez

EXTENSION

FLEXION

Figura 7.10. Concepto de rigidez de una barra.

que representa la proporción del momento  $M_i$  que se transmite, como reacción, al otro extremo  $j$ .

#### 7.4.4. Determinación de las rigideces y coeficientes de una barra. Caso general

La obtención de los valores  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\gamma_{12}$  y  $\gamma_{21}$  de una barra constituye una etapa previa de cálculo imprescindible en el método de Cross. Sin embargo, se puede comprobar que estos cuatro valores no son independientes entre sí, ya que están relacionados por la ecuación:

$$R_1 \gamma_{12} = R_2 \gamma_{21} \quad (7.23)$$

Esta expresión se deduce de la aplicación del teorema de reciprocidad entre los estados 1 y 2 que se representan en la figura 7.11a). En efecto, se obtiene:

$$M_1(\theta_1' = 0) + M_2' \cdot \theta_2 = M_1' \cdot \theta_1 + M_2(\theta_2' = 0)$$

es decir

$$M_2' \cdot \theta_2 = M_1' \cdot \theta_1$$

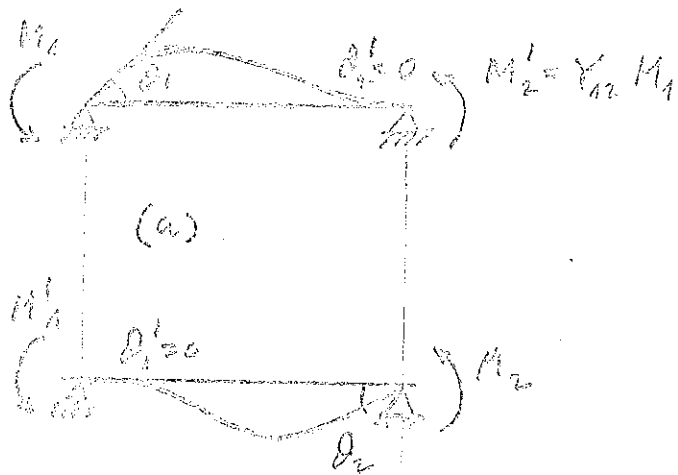
que implica

$$\gamma_{12} M_1 \frac{M_2}{R_2} = \gamma_{21} M_2 \frac{M_1}{R_1}$$

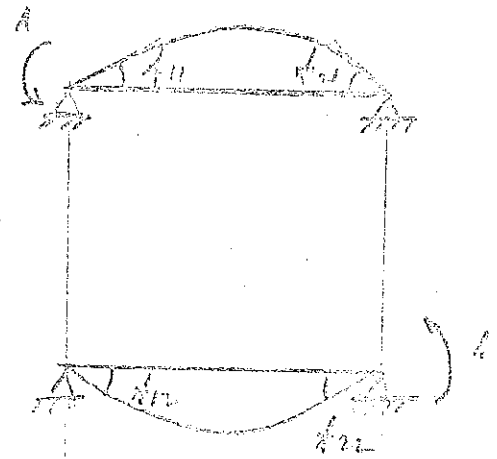
que se reduce a la ecuación (7.23).

Por lo tanto, sólo es preciso calcular tres de estas características, puesto que la restante se deduce mediante la ecuación anterior. A veces, ésta se utiliza para comprobar el cálculo de los cuatro valores  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\gamma_{12}$  y  $\gamma_{21}$ , que, llevado a cabo independientemente, debe satisfacer (7.23).

La determinación de las características de una barra representa el cálculo de una viga una vez hiperestática (articulada-empotrada). Con objeto de conseguir una adecuada ordenación de este



(a) Relación entre los momentos y las rotaciones de una barra.



(b) Definición de los coeficientes de flexibilidad.

Figura 7.11. Relaciones y conceptos fundamentales de una barra.

cálculo hiperestático, es conveniente resolver el siguiente problema previo:

En una barra biarticulada deducir los coeficientes  $f_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) correspondientes al valor del ángulo que aparece en el extremo  $i$  cuando actúa un momento unidad en el extremo  $j$  (figura 7.11b).

Se observa que estos coeficientes siempre satisfacen:

$$f_{ii} > 0 \quad \text{y} \quad f_{12} = f_{21}$$

(en virtud del teorema de Maxwell). La matriz  $\underline{f}$  definida como

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$$

se suele denominar matriz de flexibilidad de la barra biarticulada. Esta matriz es positiva definida y simétrica. La obtención de los valores  $f_{ij}$  puede realizarse mediante la utilización del teorema de la viga conjugada (figura 7.12).

Este teorema expresa la ley de flechas y giros en una viga simplemente apoyada como las leyes respectivas de los esfuerzos, momentos y cortantes, de otra viga denominada conjugada. Esta se define como una viga simplemente apoyada de la misma luz que la real bajo unas cargas positivas, representadas por la ley de momentos flectores de la viga real dividida en cada sección por el producto  $EI$  (módulo de elasticidad por la inercia a flexión).

Haciendo uso de este teorema, se pueden obtener los valores de los elementos de la matriz de flexibilidad,  $f_{ij}$  (figura 7.13), puesto que las leyes de momentos flectores de la viga real son lineales,  $1 - \frac{x}{L}$  y  $\frac{x}{L}$ , cuando el momento unidad actúa respectivamente en los extremos 1 y 2 de la viga. De esta fórmula se deducen las expresiones de las flexibilidades:

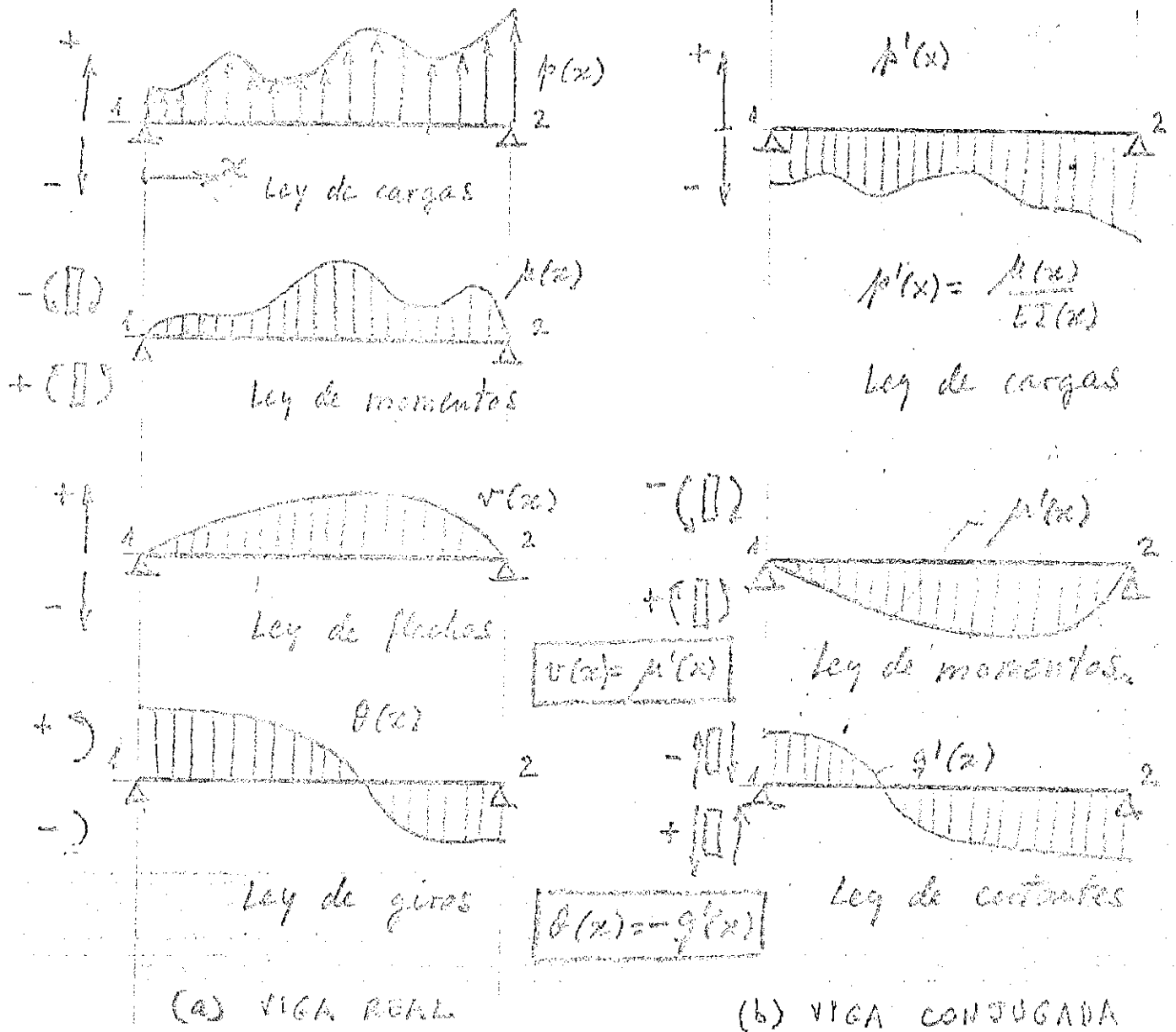


Figura 7.12. Teorema de la viga conjugada.

$$\begin{aligned}
 f_{11} &= \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \frac{dx}{EI} \\
 f_{12} &= f_{21} = -\int_0^L \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{dx}{EI} \\
 f_{22} &= \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 \frac{dx}{EI}
 \end{aligned}
 \tag{7.24}$$

Una vez deducidos los valores de las flexibilidades de la barra,  $f_{ij}$ , se calculan las rigideces  $R_i$  y coeficientes de transmisión  $\gamma_{ij}$  mediante combinación lineal de estados de carga bajo momento unidad de la viga simplemente apoyada (figura 7.14).

En efecto, en el caso del cálculo de  $R_1$ , se deduce la condición de empotramiento en el nudo 2, bajo la acción de un momento unidad en el nudo 1:

$$0 = f_{21} + \gamma_{12} f_{22} \tag{7.25a}$$

Por otra parte, el ángulo girado por el extremo 1 es:

$$\theta_1 = f_{11} + \gamma_{12} f_{12} \tag{7.25b}$$

Se obtienen por lo tanto, las siguientes expresiones:

(a) Coeficiente de transmisión

$$\gamma_{12} = -\frac{f_{21}}{f_{22}} \tag{7.26a}$$

y por permutación de índices

$$\gamma_{21} = -\frac{f_{12}}{f_{11}} \tag{7.26b}$$

(b) Rigidez

$$R_1 = \frac{1}{\theta_1} = \frac{1}{f_{11} + \gamma_{12} f_{12}} = \frac{f_{22}}{f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}} \tag{7.27a}$$



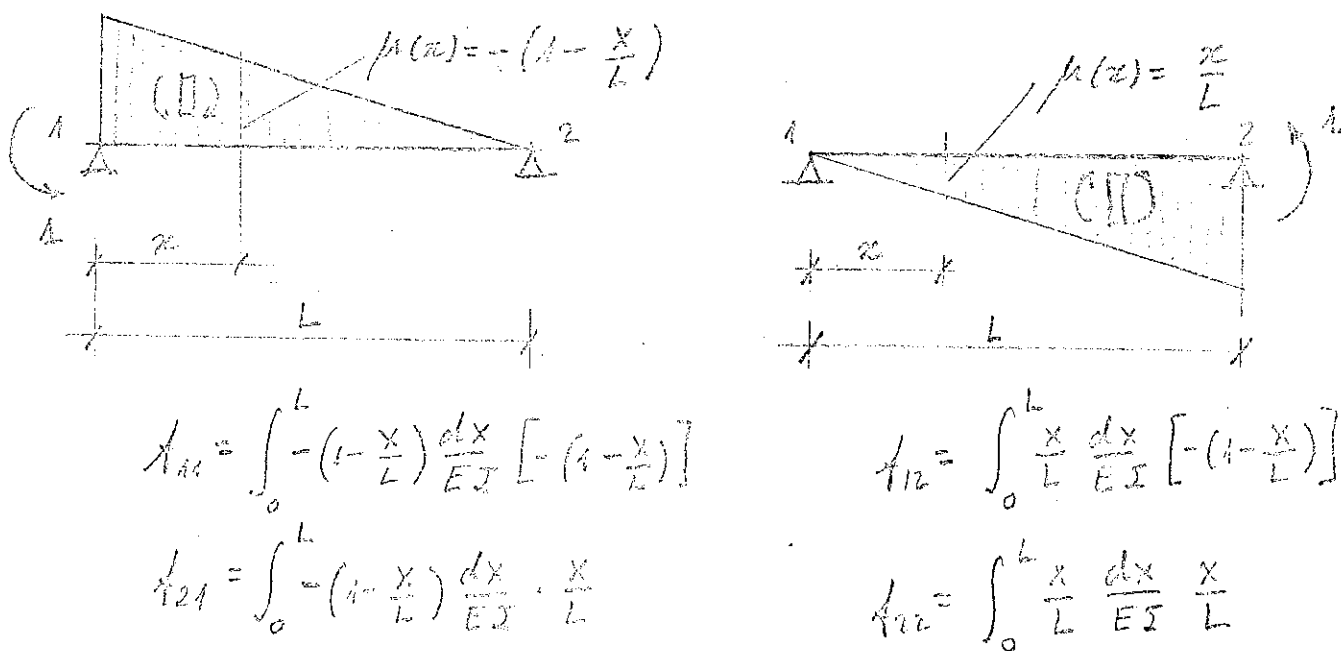


Figura 7.13. Obtención de las flexibilidades de una barra.

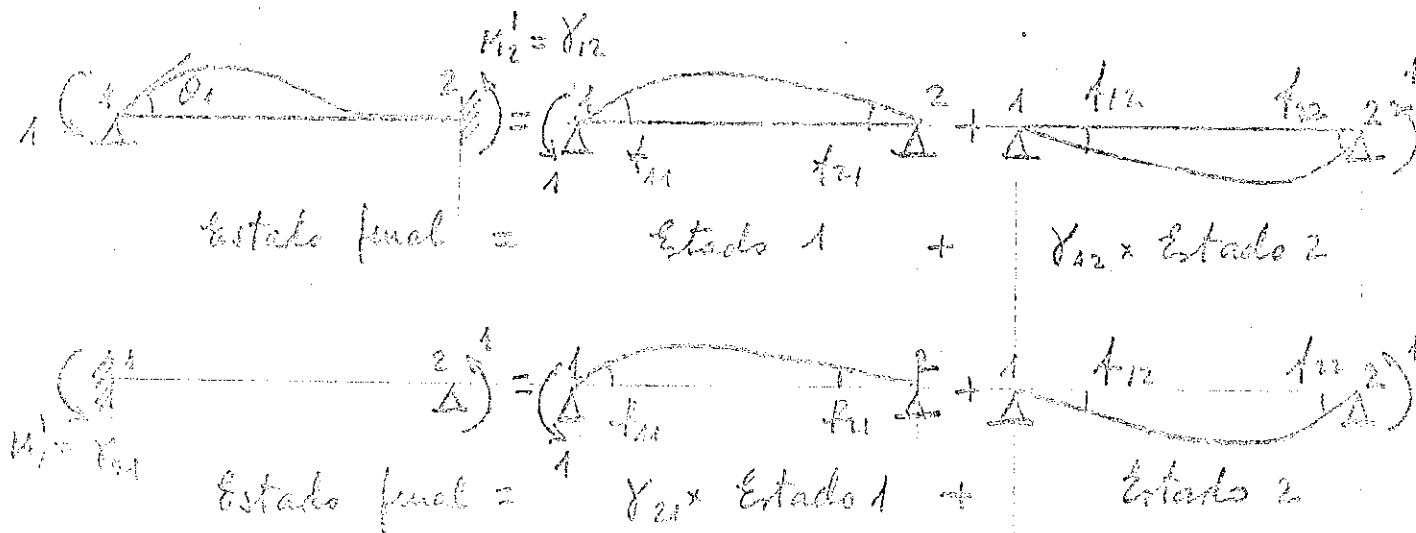


Figura 7.14. Determinación de las rigideces y coeficientes de transmisión.

y análogamente para el nudo 2

$$R_2 = \frac{f_{11}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}} \quad (7.27b)$$

Puede a veces ser de interés determinar los valores de las flexibilidades, si se conocen las rigideces y coeficientes de transmisión de la viga. Las fórmulas que se obtienen en este caso se deducen, como se muestra en la figura 7.14, de las siguientes ecuaciones que corresponden a las (7.25a) y (7.25b) anteriores:

$$0 = f_{12} + \gamma_{21}f_{11}$$

$$0 = f_{21} + \gamma_{12}f_{22}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{R_1} = f_{11} + \gamma_{12}f_{12}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{R_2} = f_{22} + \gamma_{21}f_{21}$$

siendo  $f_{12} = f_{21}$ .

Resolviendo el sistema anterior, se llega al resultado final:

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{1 - \gamma_{12}\gamma_{21}}{R_1} \\ f_{22} &= \frac{1 - \gamma_{12}\gamma_{21}}{R_2} \\ f_{12} &= -\gamma_{21} \frac{(1 - \gamma_{12}\gamma_{21})}{R_1} \\ f_{21} &= -\gamma_{12} \frac{(1 - \gamma_{12}\gamma_{21})}{R_2} \end{aligned} \quad (7.28)$$

Ejemplo 7.1. Calcular las rigideces y coeficientes de transmisión de una barra recta de luz  $L$ , inercia  $I$  y módulo de elasticidad  $E$  constantes.

La aplicación de las fórmulas (7.24) conduce a los siguientes resultados de las flexibilidades:

$$f_{11} = f_{22} = \frac{L}{3EI} \qquad f_{12} = f_{21} = -\frac{L}{6EI}$$

Las rigideces se deducen al considerar las fórmulas (7.29)

$$R_1 = R_2 = \frac{4EI}{L}$$

y los coeficientes de transmisión son, según (7.26):

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{1}{2}$$

#### 7.4.5. Cálculo de las rigideces y coeficientes de transmisión de una barra

La obtención de los valores  $R_i$  y  $\gamma_{ij}$  de una barra recta de sección variable puede llevarse a cabo mediante la aplicación directa de las fórmulas (7.24), (7.26) y (7.28). Sin embargo el cálculo analítico de las integrales puede ser en muchos casos engorroso y es preferible recurrir, entonces, a su determinación numérica mediante fórmulas apropiadas (trapeacios, Poncelet, Simpson o bien, si se utiliza un computador, fórmulas de Gauss). El cálculo numérico es recomendable en piezas rectas con cartabones y, en general, cuando existen distintas expresiones funcionales de la variación del producto  $EI$ . Sin embargo, existen situaciones con distribuciones sencillas, si bien descontinuas, del producto  $EI$ , que permiten evaluar las integrales (7.25) mediante consideraciones geométricas, que permiten simplificar de un modo considerable los cálculos.

A continuación se muestran ejemplos de cada una de las tres posibilidades anteriores.

Ejemplo 7.2. Calcular las rigideces y coeficientes de transmisión de una barra recta de luz  $L$ , sección rectangular de canto constante y ancho variable linealmente entre  $b_1$  y  $b_2$ .

El módulo de elasticidad  $E$  es constante.

Las inercias  $I_1$  e  $I_2$  en los extremos 1 y 2 de la barra son:

$$I_1 = \frac{b_1 h^3}{12} \quad I_2 = \frac{b_2 h^3}{12}$$

y la ley de inercias es

$$I = I_1 + \frac{I_2 - I_1}{L} x = I_0 (1 + \mu \xi)$$

siendo  $I_0 = \frac{I_1 + I_2}{2}$  la inercia media

$$\mu = \frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1} \quad (|\mu| < 1) \text{ parámetro que permite definir la ley}$$

de variación lineal.

$$\xi = \frac{2x}{L} - 1 \text{ variable adimensional } (-1 \leq \xi \leq 1).$$

Las fórmulas (7.24) se convierten en las siguientes:

$$f_{11} = \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \frac{dx}{EI} = \frac{L}{8EI_0} \int_{-1}^1 (1 - \xi)^2 \frac{d\xi}{1 + \mu \xi} = \frac{L}{4EI_0} A \left\{ 1 + \left( \frac{2\mu + 1}{\mu} \right) \left( \frac{A - 1}{A} \right) \right\}$$

$$f_{22} = \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 \frac{dx}{EI} = \frac{L}{8EI_0} \int_{-1}^1 (1 + \xi)^2 \frac{d\xi}{1 + \mu \xi} = \frac{L}{4EI_0} A \left\{ 1 - \left( \frac{2\mu - 1}{\mu} \right) \left( \frac{A - 1}{A} \right) \right\}$$

$$f_{12} = - \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} \frac{dx}{EI} = - \frac{L}{8EI_0} \int_{-1}^1 (1 - \xi^2) \frac{d\xi}{1 + \mu \xi} = - \frac{L}{4EI_0} A \left\{ 1 - \frac{1}{\mu} \left( \frac{A - 1}{A} \right) \right\}$$

siendo

$$A = \frac{1}{2\mu} \ln \frac{1 + \mu}{1 - \mu}$$

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = \frac{4}{\mu^2} (A-1) \left(\frac{L}{4EI_0}\right)^2$$

Las rigideces son, entonces:

$$R_1 = \frac{EI_0}{L} \left\{ \frac{A\mu^2}{A-1} - (2\mu-1) \right\}$$

$$R_2 = \frac{EI_0}{L} \left\{ \frac{A\mu^2}{A-1} + (2\mu+1) \right\}$$

y los coeficientes de transmisión son:

$$\gamma_{12} = \frac{1 - \frac{A-1}{\mu^2 A}}{1 - (2\mu-1) \frac{A-1}{\mu^2 A}}$$

$$\gamma_{21} = \frac{1 - \frac{A-1}{\mu^2 A}}{1 + (2\mu+1) \frac{A-1}{\mu^2 A}}$$

Se comprueba que para  $\mu \rightarrow 0$ ,  $A = 1 + \frac{\mu^2}{3}$  y se obtienen

$$R_1 = R_2 = \frac{4EI_0}{L}, \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{1}{2} \quad \text{con} \quad I_0 = I_1 = I_2.$$

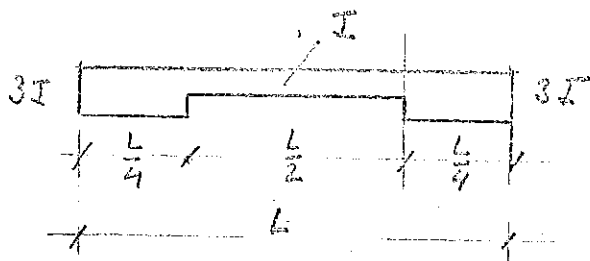
Ejemplo 7.3. Calcular geométicamente las rigideces y los coeficientes de transmisión de la barra recta de luz  $L$ , con la variación de inercias de acuerdo con la ley que se muestra en la figura 7.15. El módulo de elasticidad es constante.

Las áreas de la figura 7.15 son:

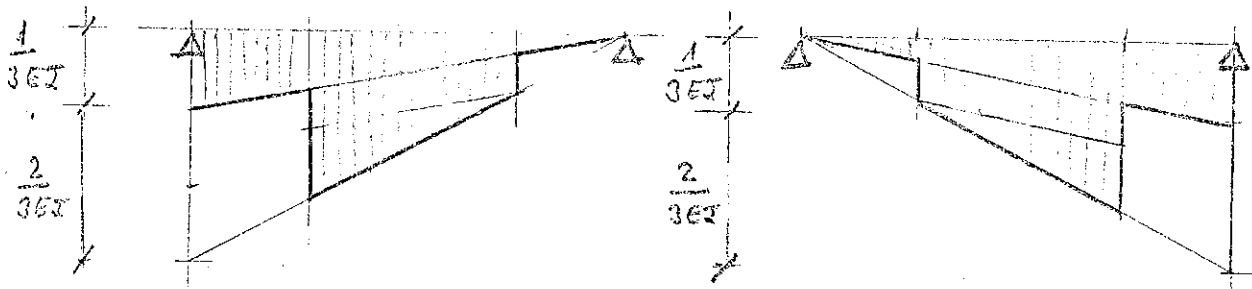
$$S_1 = \frac{1}{3EI} \frac{L}{2} = \frac{1}{6} \frac{L}{EI}$$

$$S_2 = \frac{2}{3EI} \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \frac{L}{EI}$$

$$S_3 = \frac{2}{3EI} \frac{1}{2} \frac{L}{4} = \frac{1}{12} \frac{L}{EI}$$

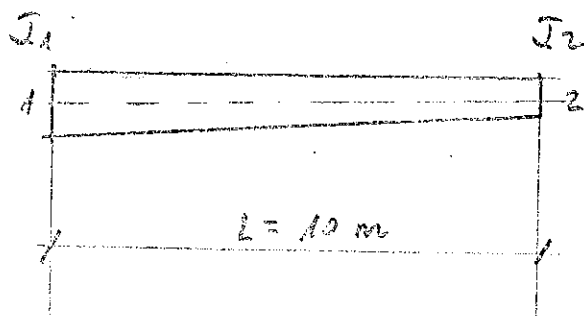


(a) Viga real

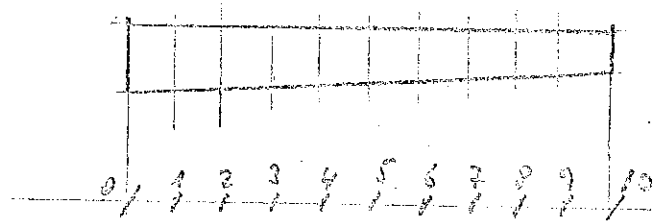


(b) Vigas conjugadas

Figura 7.15. Ejemplo 7.3.



(a) Viga real



(b) División en tramos

Figura 7.16. Ejemplo 3.4.

Se deduce:

$$f_{11} = S_1 \frac{2}{3} + S_2 \frac{1}{2} + S_3 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \right) = \left( \frac{1}{9} + \frac{1}{24} + \frac{7}{144} \right) \frac{L}{EI} = \frac{29}{144} \frac{L}{EI}$$

$$f_{22} = S_1 \frac{2}{3} + S_2 \frac{1}{2} + S_3 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \right) = \left( \frac{1}{9} + \frac{1}{24} + \frac{7}{144} \right) \frac{L}{EI} = \frac{29}{144} \frac{L}{EI}$$

$$f_{12} = S_1 \frac{1}{3} + S_2 \frac{1}{2} + S_3 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \right) = \left( \frac{1}{18} + \frac{1}{24} + \frac{5}{144} \right) \frac{L}{EI} = \frac{19}{144} \frac{L}{EI}$$

$$f_{11} f_{22} - f_{12}^2 = \frac{480}{144^2}$$

Por lo tanto, las rigideces y coeficientes de transmisión de la viga son:

$$R_1 = 8,7 \frac{EI}{L}$$

$$R_2 = 8,7 \frac{EI}{L}$$

$$\gamma_{12} = 0,655$$

$$\gamma_{21} = 0,655$$

Ejemplo 7.4. Determinar numéricamente las rigideces y coeficientes de transmisión de la barra que se representa en la figura 7.16. de sección rectangular de ancho constante y canto variable linealmente, de modo que  $I_1 = 10 \text{ m}^4$ ,  $I_2 = 10 \text{ m}^4$ . La luz es de 10 m. y se considera por simplicidad el modulo de elasticidad  $E = 1 \text{ tm}^{-2}$ .

Se divide la viga en 10 tramos de 1 m. y se construye la tabla 7.1, que expresa la fórmula de los trapecios. Las inercias de cada tramo se consideran las correspondientes a su sección central.

Tabla 7.1. Cálculo de las flexibilidades

$\frac{x}{L}$	$1-\frac{x}{L}$	(1) $(\frac{x}{L})^2$	(2) $(1-\frac{x}{L})^2$	(3) $(1-\frac{x}{L})\frac{x}{L}$	(4) $\frac{1}{EI(x)}$	(1).(4)	(2).(4)	(3).(4)
0.05	0.95	0.0025	0.9025	0.0475	1.085	0.00271	0.97921	0.05154
0.15	0.85	0.0225	0.7225	0.1275	1.286	0.02893	0.92913	0.16396
0.25	0.75	0.0625	0.5625	0.1875	1.540	0.09625	0.86625	0.28875
0.35	0.65	0.1225	0.4225	0.2275	1.865	0.22846	0.78796	0.42429
0.45	0.55	0.2025	0.3025	0.2475	2.288	0.46332	0.69212	0.56628
0.55	0.45	0.3025	0.2025	0.2475	2.850	0.86212	0.57712	0.70537
0.65	0.35	0.4225	0.1225	0.2275	3.613	1.52649	0.44259	0.82196
0.75	0.25	0.5625	0.0625	0.1875	4.673	2.62856	0.29206	0.87619
0.85	0.15	0.7225	0.0225	0.1275	6.193	4.47444	0.13934	0.78961
0.95	0.05	0.9025	0.0025	0.0475	8.451	7.62703	0.02113	0.40142
						17.94	5.73	5.09

Resulta  $f_{11} = 5,73$

$f_{22} = 17,94$

$f_{12} = 5,09 = f_{21}$

$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 76,89$

$R_1 = 23,3 \text{ mt.}$

$R_2 = 7,4 \text{ mt.}$

$\gamma_{12} = 0,28$

$\gamma_{21} = 0,89$

#### 7.4.6. Momentos de empotramiento rígido

Los momentos de empotramiento rígido constituyen los momentos de reacción (acciones sobre la barra) producidos por la coacción al giro en los extremos cuando actúa una carga determinada. El procedimiento de cálculo que se considera se basa en obtener los valores de los ángulos de giro,  $\theta_1^0$  y  $\theta_2^0$ , en los extremos de la ba-



rra, supuesta simplemente apoyada, bajo la carga. El cálculo de estos giros puede efectuarse según las fórmulas de Möhr, o bien, por medio de la viga conjugada (figura 7.17). Si  $M_1^0$  y  $M_2^0$  son los momentos de empotramiento rígido que se buscan, se deducen fácilmente las siguientes condiciones de compatibilidad (giro nulo en los apoyos) - que permiten su cálculo:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \theta_1^0 + f_{11} M_1^0 + f_{12} M_2^0 = 0 \\ \theta_2 &= \theta_2^0 + f_{21} M_1^0 + f_{22} M_2^0 = 0\end{aligned}\quad (7.29)$$

Es decir:

$$\begin{aligned}M_1^0 &= \frac{-\theta_1^0 f_{22} + \theta_2^0 f_{12}}{f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}} = -R_1 \theta_1^0 - R_2 \gamma_{21} \theta_2^0 \\ M_2^0 &= \frac{-\theta_2^0 f_{11} + \theta_1^0 f_{21}}{f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21}} = -R_2 \theta_2^0 - R_1 \gamma_{12} \theta_1^0\end{aligned}\quad (7.30)$$

Los giros en los extremos de la viga simplemente apoyada son:

$$\theta_1^0 = -\int_0^L \frac{\mu_x^0}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx \quad \theta_2^0 = \int_0^L \frac{\mu_x^0}{EI} \frac{x}{L} dx \quad (7.31)$$

siendo  $\mu_x^0$  la ley de momentos flectores que aparecen en la viga - biapoyada bajo la acción de la carga cuyos momentos de empotramiento se buscan.

El cálculo de las integrales (7.31) puede efectuarse mediante procedimientos diversos: analíticos, geométricos o numéricos (Poncelet, trapecios, Simpson, Gauss, etc). A continuación se indican algunos ejemplos.

Ejemplo 7.5. Obtener los momentos de empotramiento rígido de la viga del ejemplo 7.2., bajo la actuación de una carga vertical descendente (gravitatoria) uniforme, de intensidad  $p$ , extendida en toda la luz.

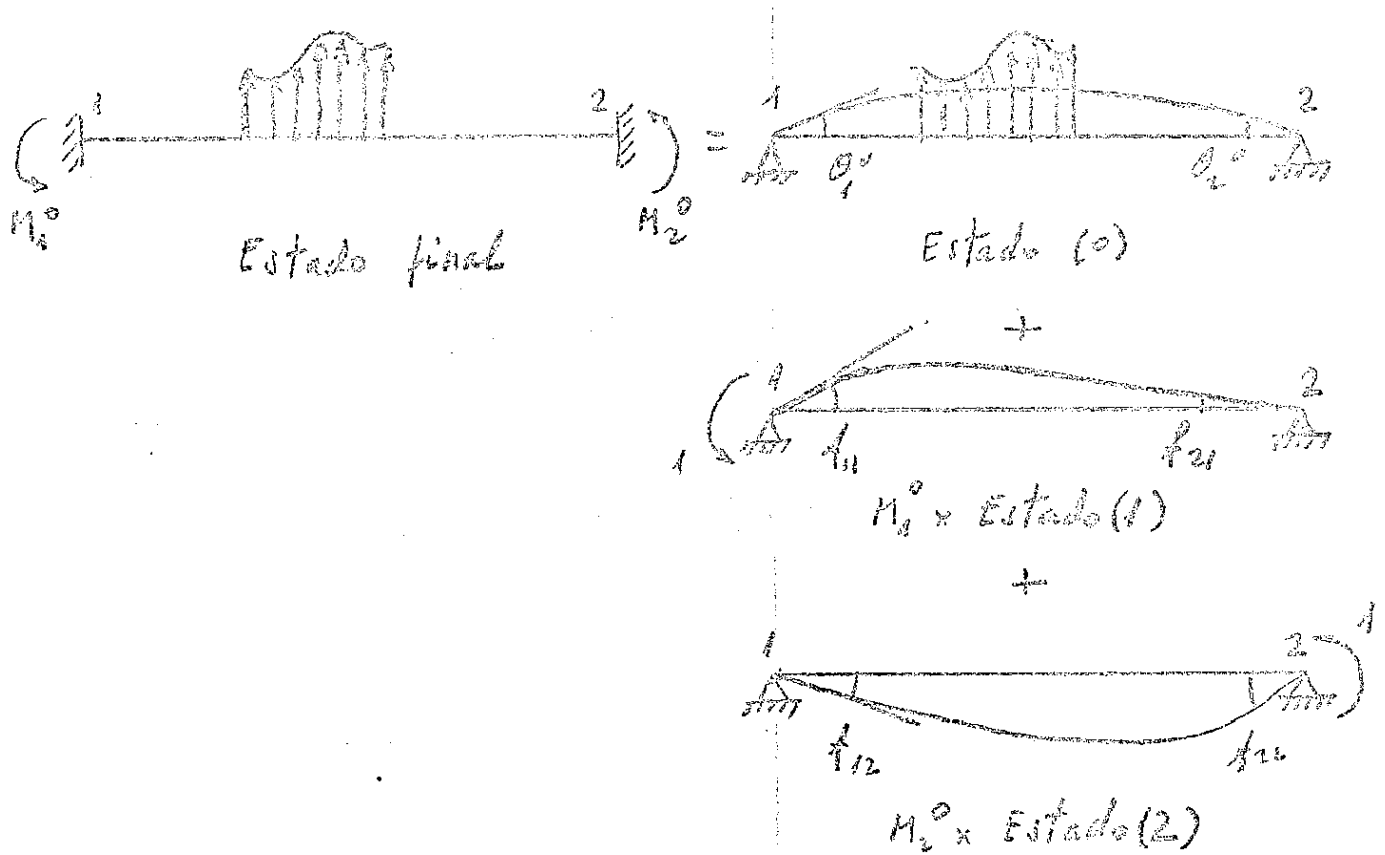


Figura 7.17. Determinación de los momentos de empotramiento rígido.

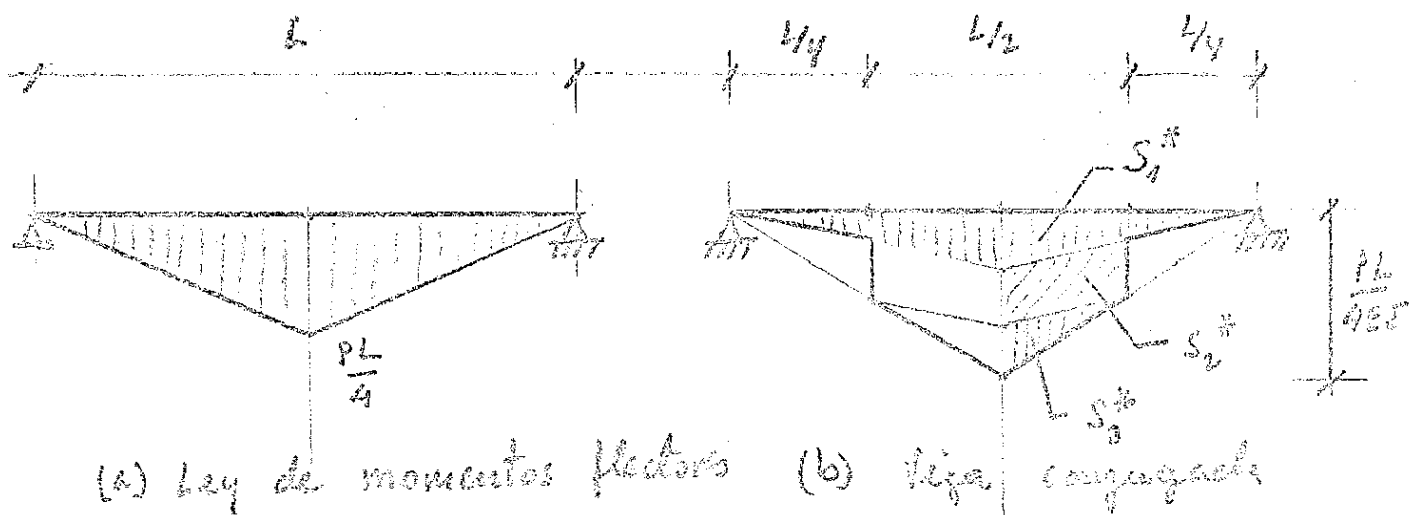


Figura 7.18. Ejemplo 7.6.

La ley de momentos flectores isostáticos es:

$$\mu_x^0 = \frac{p}{2} x(L-x) = \frac{pL^2}{2} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Los giros en los extremos son:

$$\theta_1^0 = -\frac{pL^2}{2} \int_0^L \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \frac{dx}{EI} = -\frac{pL^3}{32EI_0} \int_{-1}^1 (\xi+1) (\xi-1)^2 \frac{d\xi}{1+\mu\xi}$$

$$\theta_2^0 = \frac{pL^2}{2} \int_0^L \frac{x}{L} \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{dx}{EI} = -\frac{pL^3}{32EI_0} \int_{-1}^1 (\xi+1)^2 (\xi-1) \frac{d\xi}{1+\mu\xi}$$

es decir

$$\theta_1^0 = -\frac{pL^3}{16EI_0} \left\{ \frac{1+\mu}{\mu} \left\{ (A-1) \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{3} \right\} + \frac{2}{3} \right\}$$

$$\theta_2^0 = \frac{pL^3}{16EI_0} \left\{ \frac{1-\mu}{\mu} \left\{ (A-1) \left( \frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{3} \right\} + \frac{2}{3} \right\}$$

Los valores de empotramiento rígido se deducen de las expresiones (7.30).

En el caso de sección constante ( $\mu=0$ ) se obtiene

$$\theta_1^0 = -\frac{pL^3}{24EI} = -\theta_2^0$$

con lo que los momentos de empotramiento rígido son:

$$M_1^0 = -M_2^0 = \frac{pL^2}{12}$$

Ejemplo 7.6. Calcular los momentos de empotramiento rígido de la viga del ejemplo 7.3., bajo la actuación de una carga vertical descendente concentrada en el centro de la luz, de valor P.

La ley de momentos flectores isostáticos se muestra en la figura 7.18, así como la viga conjugada correspondiente.

Las áreas de la figura 7.18 son:

$$S_1^* = \frac{PL}{4EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{48} \frac{PL^2}{EI}$$

$$S_2^* = \frac{PL}{4EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{4} = \frac{1}{48} \frac{PL^2}{EI}$$

$$S_3^* = \frac{PL}{4EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{96} \frac{PL^2}{EI}$$

El cortante en un apoyo se deduce, por simetría, como suma de las áreas anteriores, es decir:

$$\theta_1^0 = -\left(\frac{1}{48} + \frac{1}{48} + \frac{1}{96}\right) \frac{PL^2}{EI} = -\frac{5}{96} \frac{PL^2}{EI} = -\theta_2^0$$

y los momentos de empotramiento rígido son:

$$M_1^0 = \frac{5}{96} \frac{PL^2}{EI} \cdot \frac{f_{22} + f_{12}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2} = \frac{5}{96} \cdot \frac{48 \cdot 144}{480} PL = \frac{3}{4} PL = -M_2^0$$

Ejemplo 7.7. Calcular los momentos de empotramiento rígido de la viga del ejemplo 7.4, bajo la actuación de una carga uniforme gravitatoria de intensidad  $p$  extendida a toda la luz.

El cálculo de las integrales 7.31 se lleva a cabo numéricamente mediante la fórmula de los trapecios y se esquematiza en la tabla 7.2, es decir:

$$\theta_1^0 = -\frac{pL^2}{2} \int_0^L \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \frac{dx}{EI}$$

$$\theta_2^0 = \frac{pL^2}{2} \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{dx}{EI}$$

La viga se divide en diez tramos iguales de longitud 1 m. y la tabla 7.2 puede considerarse como continuación de la tabla 7.1 anterior.

Tabla 7.2. Cálculo de los momentos de empotramiento rígido.

$\frac{x}{L}$	$1 - \frac{x}{L}$	(5) $(\frac{x}{L})^2 (1 - \frac{x}{L})^2$	(6) $(\frac{x}{L}) (1 - \frac{x}{L})^2$	(4) $\frac{1}{EI(x)}$	(5).(4)	(6).(4)
0.05	0.95	0.00237	0.04512	1.085	0.00257	0.04896
0.15	0.85	0.01912	0.10837	1.286	0.02459	0.13936
0.25	0.75	0.04687	0.14062	1.540	0.07218	0.21655
0.35	0.65	0.07962	0.14787	1.865	0.14849	0.27578
0.45	0.55	0.11137	0.13612	2.288	0.25481	0.31144
0.55	0.45	0.13612	0.11137	2.850	0.38794	0.31740
0.65	0.35	0.14787	0.07962	3.613	0.53425	0.28767
0.75	0.25	0.14062	0.04687	4.673	0.65712	0.21902
0.85	0.15	0.10837	0.01912	6.193	0.67114	0.11841
0.95	0.05	0.04512	0.00237	8.451	0.38131	0.02003
					3.13	1.95

Por lo tanto, se deducende la citada tabla, los giros de los extremos:

$$\theta_1^0 = -\frac{pL^3}{2EI} 1,95 \frac{1}{10}$$

$$\theta_2^0 = \frac{pL^3}{2EI} 3,13 \frac{1}{10}$$

y los momentos de empotramiento rígido resultan:

$$M_1^0 = 23,3\theta_1^0 - 0,89 \cdot 7,40\theta_2^0 = 13,0 \text{ mt.}$$

$$M_2^0 = 7,40\theta_2^0 + 0,28 \cdot 23,3\theta_1^0 = -5,0 \text{ mt.}$$

#### 7.5. CARACTERISTICAS DE BARRAS NO RECTAS

Las fórmulas anteriores pueden extenderse de un modo inmediato a situaciones que impliquen barras curvas, poligonales, etc. e incluso a estructuras en las que se puedan distinguir dos nudos (extremos) empotrados. A continuación se exponen algunos ejemplos,

en los que se muestra la técnica operativa de cálculo, que ahora se modifica ligeramente, ya que la situación biarticulada de la barra recta (precisa para la determinación de las flexibilidades  $f_{ij}$ ) era una estructura isostática y ahora, en la situación general, corresponde a una estructura una vez hiperestática.

Ejemplo 7.8. Determinar las rigideces y coeficientes de transmisión de un arco parabólico con proyección vertical constante de la inercia. No se consideran las deformaciones debidas al esfuerzo axial ni cortante (figura 7.19). Obtener los momentos de empotramiento rígido bajo una acción gravitatoria de intensidad  $p$  por unidad de proyección horizontal extendida a toda la luz.

La directriz del arco, si se adoptan los ejes de la figura 7.19, es:

$$y = 4f(1-\xi)\xi \quad \text{con} \quad \xi = \frac{x}{l}$$

El cálculo de las flexibilidades exige resolver el arco biarticulado de la figura 7.20. Por otra parte, dada la simetría de la estructura, se obtiene  $f_{11} = f_{22}$ , además de que  $f_{12} = f_{21}$ . Por lo tanto, sólo es preciso conocer dos flexibilidades ( $f_{11}$  y  $f_{21}$ ) cuyo cálculo es hiperestático y puede descomponerse en el de dos estados, como se muestra en la figura 7.20. Por consiguiente:

$$f_{11} = f_{11}^0 + X f_{11}^1$$

$$f_{21} = f_{21}^0 + X f_{21}^1$$

En el estado 0, la ley de momentos flectores isostáticos es  $\mu_x^0 = -(1-\xi)$  y los valores de los movimientos se deducen según el teorema de Castigliano (fórmula 3.9) y, teniendo en cuenta que  $ds = dx \cos \alpha$ , se obtiene:

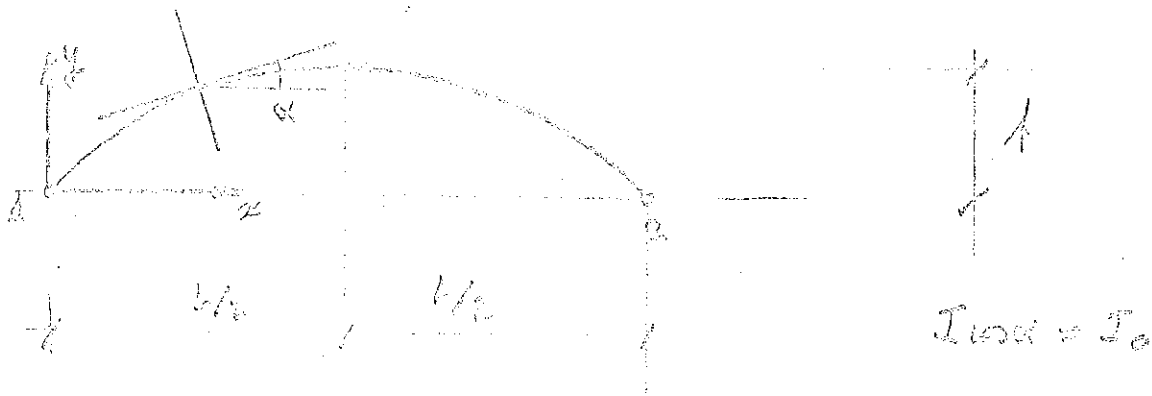


Figura 7.19. Ejemplo 7.8.

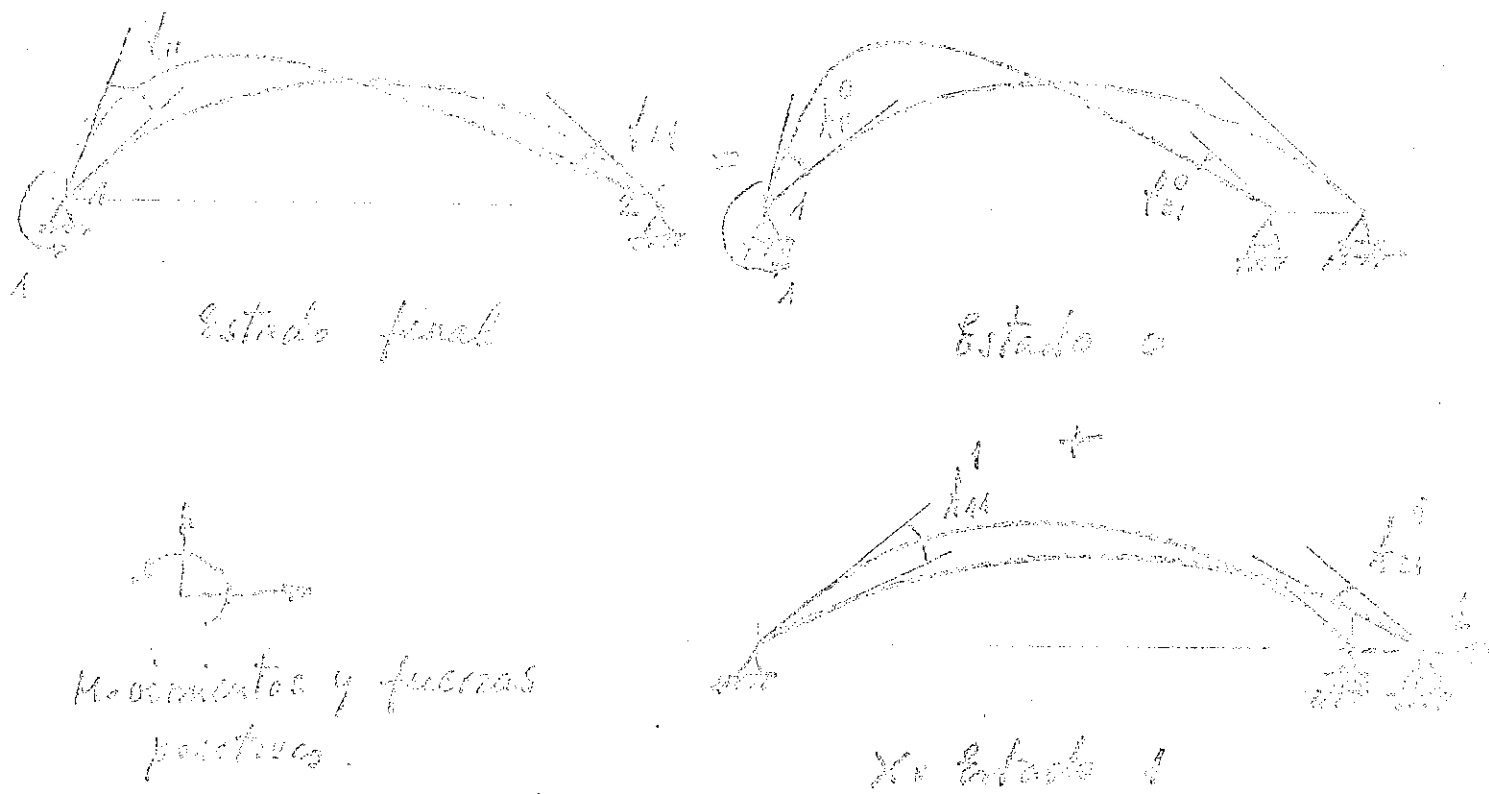


Figura 7.20. Arco biarticulado.

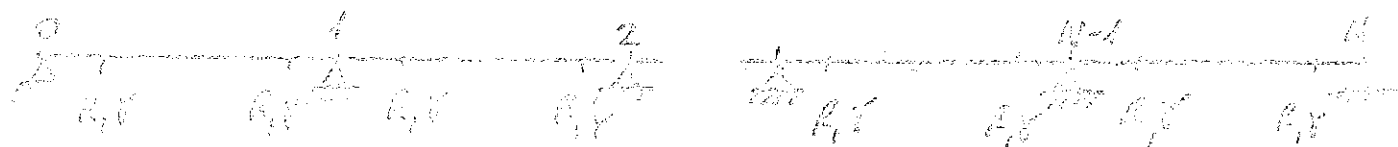


Figura 7.21. Ejemplo 7.9.

$$f_{11}^0 = - \int_0^L \mu_x^0 (1-\xi) \frac{ds}{EI_0 \cos \alpha} = - \frac{L}{EI_0} \int_0^1 (1-\xi)^2 d\xi = - \frac{L}{3EI_0}$$

$$f_{21}^0 = \int_0^L \mu_x^0 \xi \frac{ds}{EI_0 \cos \alpha} = - \frac{L}{EI_0} \int_0^1 (1-\xi) \xi d\xi = - \frac{L}{6EI_0}$$

$$\Delta^0 = \int_0^L \mu_x^0 Y \frac{ds}{EI_0 \cos \alpha} = - \frac{4fL}{EI_0} \int_0^1 (1-\xi)^2 \xi d\xi = - \frac{fL}{3EI_0}$$

Análogamente, en el estado 1 se obtienen los movimientos (con  $\mu_x^1 = Y$ ):

$$f_{11}^1 = \Delta^0 = - \frac{fL}{3EI_0} \quad (\text{por reciprocidad})$$

$$f_{21}^1 = -\Delta^0 = \frac{fL}{3EI_0} \quad (\text{por simetría})$$

$$\Delta^1 = \int_0^L Y^2 \frac{ds}{EI_0 \cos \alpha} = \frac{16f^2 L}{EI_0} \int_0^1 (1-\xi)^2 \xi^2 d\xi = \frac{8}{15} f^2 \frac{L}{EI_0}$$

La ecuación hiperestática (compatibilidad) es:

$$\Delta = \Delta^0 + X \Delta^1 = 0$$

$$\text{con lo que } X = - \frac{\Delta^0}{\Delta^1} = \frac{5}{8} \frac{1}{f}$$

y los giros en los extremos son:

$$f_{11} = f_{11}^0 + X f_{11}^1 = \frac{L}{8EI_0} = f_{22}$$

$$f_{21} = f_{21}^0 + X f_{21}^1 = \frac{L}{24EI_0} = f_{12}$$

Las rigideces y coeficientes de transmisión son:

$$R_1 = \frac{f_{22}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2} = \frac{9EI_0}{L} = R_2$$

$$\gamma_{12} = \frac{f_{12}}{f_{22}} = - \frac{1}{3} = \gamma_{21}$$



Los momentos de empotramiento rígido son nulos, ya que - la directriz parabólica corresponde, al no existir acortamiento ni deformación de cortante, al antifunicular de la carga uniforme en horizontal. Se obtiene este mismo resultado de un modo analítico - como sigue:

Ley de momentos flectores isostáticos (estructura del estado 0):

$$\mu_x^0 = \frac{p \cdot x(L-x)}{2}$$

que produce un movimiento horizontal  $\Delta^0$ , de valor

$$\Delta^0 = \int_0^L \mu_x^0 \cdot \frac{ds}{EI_0 \cos \alpha} = \frac{2p \cdot L^3 f}{EI_0} \int_0^1 \xi^2 (1-\xi)^2 d\xi = \frac{pL^3 f}{15EI_0}$$

La reacción horizontal hiperestática X es:

$$X \cdot \Delta^1 + \Delta^0 = 0 \quad X = - \frac{pL^2}{8f}$$

La ley de momentos flectores, en el estado final (arco biarticulado) es

$$\mu_x = \mu_x^0 + X \cdot \mu_x^1 = \frac{p \cdot x(L-x)}{2} - X \cdot y = 0$$

y los giros  $\theta_1^0$  y  $\theta_2^0$  son por lo tanto nulos, así como los momentos de empotramiento correspondientes ( $M_1^0 = M_2^0 = 0$ ).

Ejemplo 7.9. Una viga continua está compuesta de N vanos iguales, cada uno con rigidez  $R_1 = R_2 = R$ , y coeficientes de transmisión  $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma$ . Si se considera esta viga como una barra de dos nudos, el primer y último apoyo, se desea conocer: a) Flexibilidades. b) Rigideces y coeficientes de transmisión. (Figura 7.21).

Se denomina  $\theta_n$  el ángulo girado por el apoyo n-simo.

Si  $N = 1$ , se deduce fácilmente

$$f_{11}^{(1)} = \theta_0 = \frac{1}{R(1-\gamma^2)}$$

$$f_{12}^{(1)} = \theta_1 = \frac{\gamma}{R(1-\gamma^2)}$$

Si  $N > 1$  se puede plantear la siguiente ecuación de equilibrio de momentos en el nudo  $n$ :

$$\gamma R \theta_{n-1} + 2 R \theta_n + \gamma R \theta_{n+1} = 0 \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (7.32)$$

y las condiciones de contorno para  $n=1$  y  $n=N$  conducen a las relaciones.

$$R \theta_0 + \gamma R \theta_1 = 1 \quad (\text{momento unidad en el nudo } 0). \quad (7.33)$$

$$\gamma R \theta_{N-1} + R \theta_N = 0 \quad (\text{momento nulo en el nudo } N).$$

La solución general de la ecuación en diferencias (7.32) es:

$$\theta_n = (-)^n \{C_1 (\operatorname{tg} \alpha)^n + C_2 (\operatorname{tg} \alpha)^{n-1}\}$$

$$\text{siendo} \quad \operatorname{sen} 2\alpha = \gamma \quad \text{o bien} \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1 - \sqrt{1 - \gamma^2}}{1 + \sqrt{1 - \gamma^2}}$$

Las condiciones de contorno (7.33) permiten determinar las constantes arbitrarias  $C_1$  y  $C_2$ , resultando

$$C_1 = \frac{1}{R \cos 2\alpha} \frac{1}{1 - (\operatorname{tg} \alpha)^{2N}} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{1}{R \cos 2\alpha} \frac{1}{(\operatorname{tg} \alpha)^{-2N} - 1}$$

y el ángulo en el nudo  $n$ -simo es

$$\theta_n = \frac{(-)^n}{R \cos 2\alpha} \frac{(\operatorname{tg} \alpha)^n + (\operatorname{tg} \alpha)^{2N-n}}{1 - (\operatorname{tg} \alpha)^{2N}}$$

En particular, para  $n=0$  y  $n=N$ , se obtienen las flexibilidades

$$f_{11}^{(N)} = \theta_0 = \frac{1}{R \cos 2\alpha} \frac{1 + (\operatorname{tg} \alpha)^{2N}}{1 - (\operatorname{tg} \alpha)^{2N}} = f_{22}^{(N)}$$

$$f_{12}^{(N)} = \theta_N = \frac{(-1)^N}{R \cos 2\alpha} \frac{2 (\operatorname{tg} \alpha)^N}{1 - (\operatorname{tg} \alpha)^{2N}} = f_{21}^{(N)}$$

Las rigideces y coeficientes de transmisión de la barra pueden deducirse mediante las expresiones (7.28) y (7.29), o bien directamente, modificando la segunda condición de contorno (7.33) en el nudo  $N$ , por la siguiente:

$$\theta_N = 0 \quad (\text{empotramiento en el nudo } N)$$

Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  adoptan ahora los valores siguientes:

$$C_1 = \frac{1}{R \cos 2\alpha} \frac{1}{1 + (\operatorname{tg} \alpha)^{2N}} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{1}{R \cos 2\alpha} \frac{(-1)}{1 + (\operatorname{tg} \alpha)^{2N}}$$

y el ángulo en el nudo  $n$  es

$$\theta_n = \frac{(-1)^n}{R \cos 2\alpha} \frac{(\operatorname{tg} \alpha)^n - (\operatorname{tg} \alpha)^{2N-n}}{1 + (\operatorname{tg} \alpha)^{2N}}$$

La rigidez es directamente  $R_1^{(N)} = \frac{1}{\theta_0}$ , es decir

$$R_1^{(N)} = R \cos 2\alpha \frac{1 + (\operatorname{tg} \alpha)^{2N}}{1 - (\operatorname{tg} \alpha)^{2N}} = R_2^{(N)}$$

y el coeficiente de transmisión es

$$\gamma_{12}^{(N)} = R \gamma \theta_{n-1} = \frac{(-1)^{N-1}}{\cos 2\alpha} \frac{(\operatorname{tg} \alpha)^{N-1} - (\operatorname{tg} \alpha)^{N+1}}{1 + (\operatorname{tg} \alpha)^{2N}} = \gamma_{21}^{(N)}$$

## 7.6. CARACTERISTICAS DE BARRAS CON UN EXTREMO ARTICULADO

Las definiciones y cálculos anteriores hacen referencia a la situación de barras biempotradas, es decir, con sus dos nudos extremos coaccionados al giro. A veces puede ser de interés considerar barras con uno de sus extremos liberalizados de la coacción al giro, y determinar sus características de rigidez y transmisión. La extensión de estos conceptos a este caso es inmediata, puesto que el nudo liberado carece de rigidez a flexión, y el coeficiente de transmisión del momento actuando en el extremo opuesto es nulo, ya que no puede soportar ningún momento. Por lo tanto, si se supone articulado el nudo 2 de la barra recta de la figura 7.22, (empotrada-apoyada), la rigidez  $R_1^{ea}$  y la transmisión  $\gamma_{12}^{ea}$  se definen como sigue:

$$R_1^{ea} = \frac{M_1}{\theta_1} \quad \text{y} \quad \gamma_{21}^{ea} = \frac{M_1}{M_2}$$

Evidentemente, se deduce inmediatamente de los resultados de los apartados anteriores, las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} R_1^{ea} &= \frac{M_1}{\theta_1} = \frac{M_1}{M_1 f_{11}} = \frac{1}{f_{11}} = R_1 (1 - \gamma_{12} \gamma_{21}) \\ \gamma_{21}^{ea} &= \gamma_{21} \end{aligned} \quad (7.34a)$$

Además, por definición, se escriben las igualdades

$$R_2^{ea} = 0$$

$$\gamma_{12}^{ea} = 0$$

Si el extremo 1 correspondiera a<sup>2</sup> apoyado, las fórmulas anteriores se convierten en las siguientes:

$$R_2^{ae} = \frac{1}{f_{22}} = R_2 (1 - \gamma_{12} \gamma_{21})$$

$$\gamma_{12}^{ae} = \gamma_{12}$$

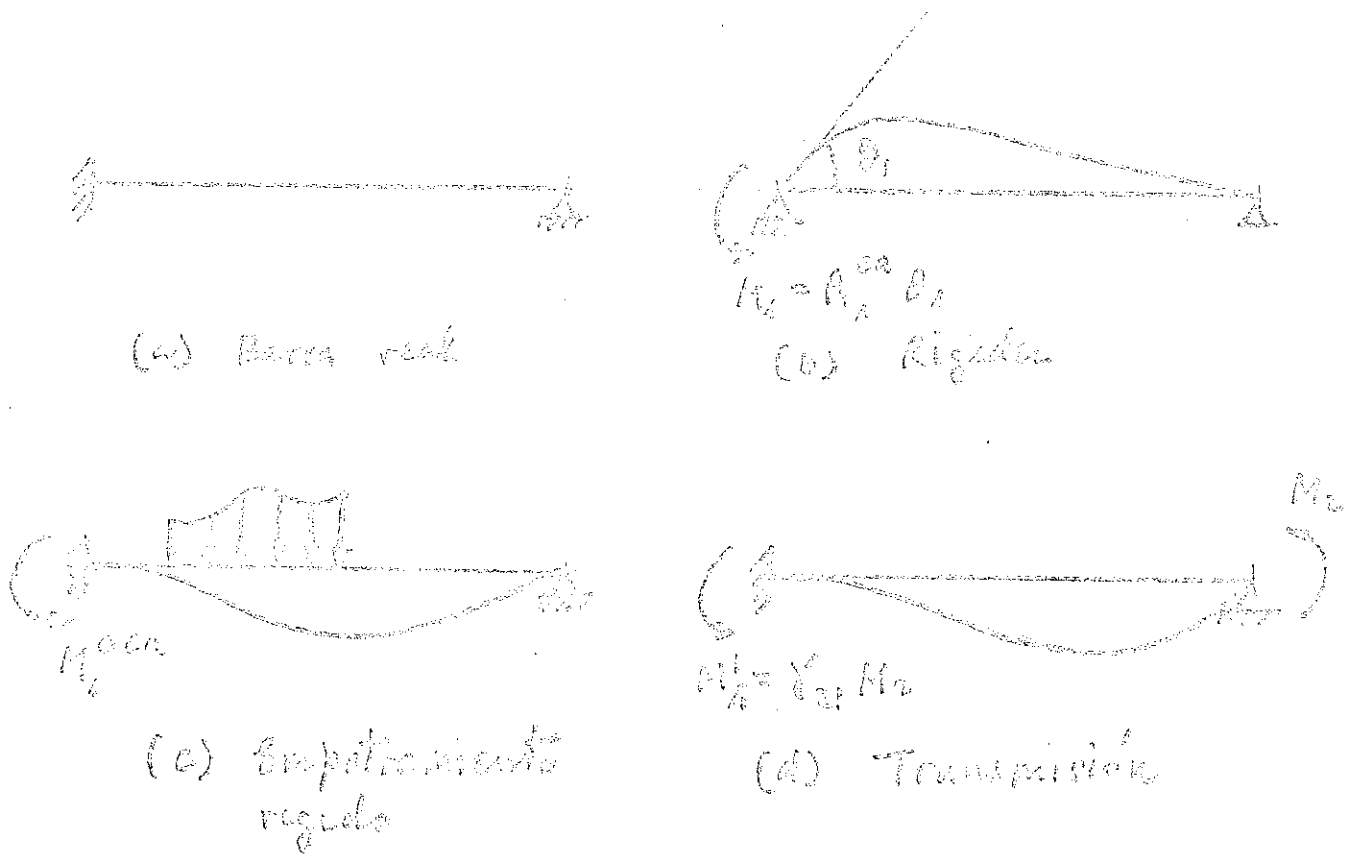


Figura 7.22. Barra empotrada-articulada.

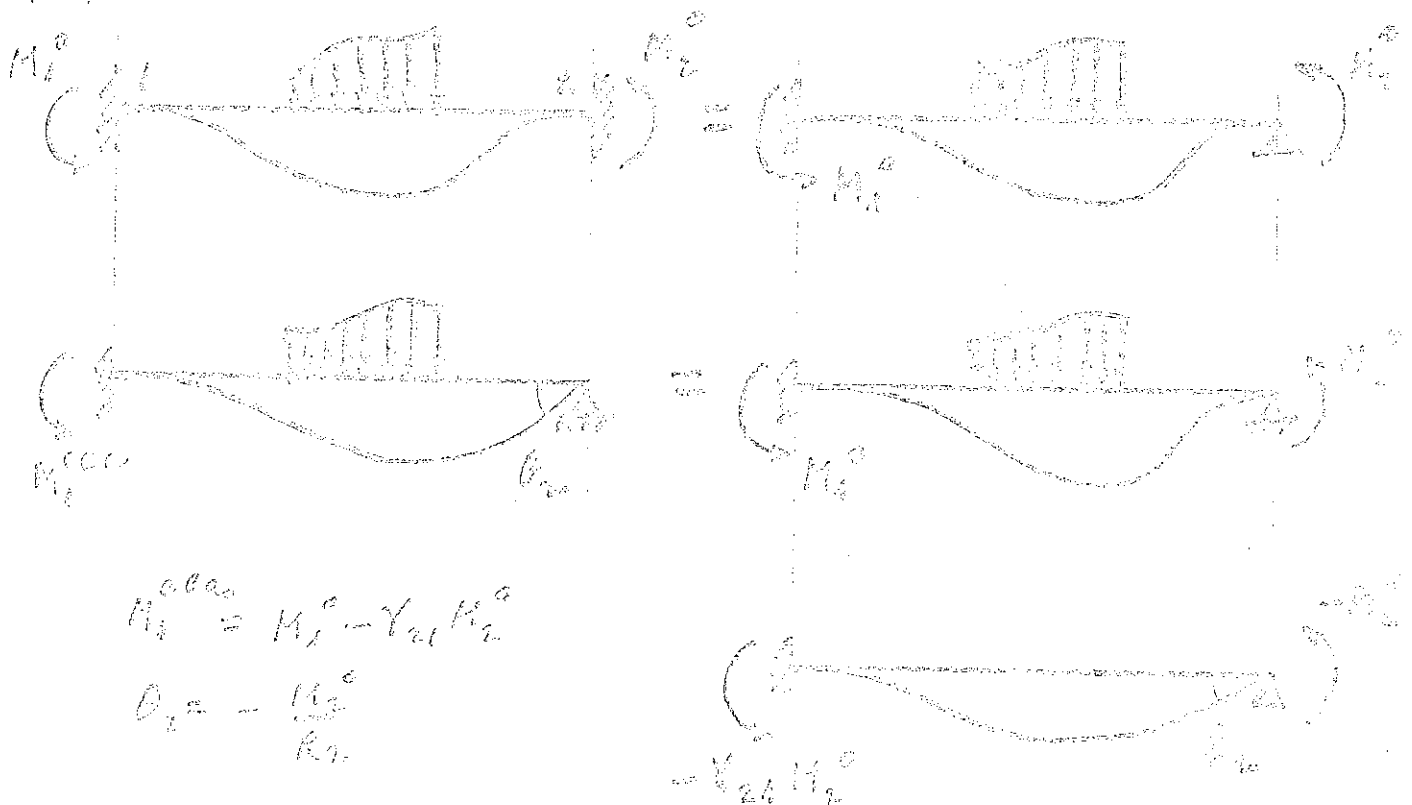


Figura 7.23. Relación entre los momentos de empotramiento rígido de la barra biempotrada y empotrada-articulada.

$$R_1^{ae} = 0 \quad (7.34b)$$

$$\gamma_{21}^{ae} = 0$$

siendo  $R_1$ ,  $R_2$  y  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{21}$ , las características de rigidez y transmisión de la barra general (biempotrada).

Evidentemente, si ambos extremos de una barra estuvieran apoyados, todas las características anteriores serían nulas.

De un modo análogo, se puede definir el momento de empotramiento rígido de una barra con un extremo articulado, como se indica en la figura (7.22d). Es decir, el momento que aparece en el extremo empotrado, bajo la acción de una carga directamente aplicada sobre la barra, al no permitir el giro y supuesto el otro nudo extremo articulado.

La obtención de este momento de empotramiento rígido es inmediata. En efecto, denominando  $\theta_1^0$  y  $\theta_2^0$  los ángulos definidos en (7.31), se deduce, para la barra empotrada-articulada.

$$\theta_1 = M_1^{0ea} f_{11} + \theta_1^0 = 0$$

y, por lo tanto, el momento de empotramiento rígido es:

$$M_1^{0ea} = -\frac{\theta_1^0}{f_{11}} = -R_1^{ea} \theta_1^0 = -R_1(1-\gamma_{12}\gamma_{21})\theta_1^0$$

y, evidentemente

$$M_2^{0ea} = 0$$

De un modo semejante, se obtiene para la barra articulada-empotrada:

$$M_2^{0ae} = -\frac{\theta_2^0}{f_{22}} = -R_2^{ae} \theta_2^0 = -R_2(1-\gamma_{12}\gamma_{21})\theta_2^0$$

y

$$M_1^{0ae} = 0$$

A veces puede ser interesante calcular los momentos de empotramiento rígido de una barra con un extremo articulado, en función de los momentos de empotramiento rígido de la barra supuesta biempotrada bajo la misma carga. Esta situación es frecuente, ya que los momentos de la barra biempotrada normalmente se encuentran tabulados y es preciso, en ocasiones, conocer los momentos (no tabulados) de la barra articulada en un extremo. La figura (7.23) ilustra la deducción de los siguientes resultados:

$$M_1^{0ea} = M_1^0 - \gamma_{21} M_2^0 \quad \text{y} \quad M_2^{0ea} = 0 \quad (7.35a)$$

y de un modo semejante

$$M_2^{0ae} = M_2^0 - \gamma_{12} M_1^0 \quad \text{y} \quad M_1^{0ae} = 0 \quad (7.35b)$$

Ejemplo 7.10. Obtener las características de una barra empotrada-apoyada, así como los momentos de empotramiento rígido para cada una de las acciones de carga gravitatorias: (a) Puntual en el centro de la luz (b). Uniforme extendida a toda la luz. La barra se supone de sección y material constantes, con características EI y luz L.

Según la fórmula (7.34a), se deduce

$$R_1^{ea} = \frac{4EI}{L} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) = \frac{3EI}{L}$$

Los momentos de empotramiento rígido son en cada caso:

(a) Carga puntual de intensidad P.

Para la viga biempotrada, se deduce

$$M_1^0 = \frac{PL}{8} = -M_2^0$$

por lo que

$$M_1^{0ea} = M_1^0 - \gamma_{21} M_2^0 = \frac{3}{2} \frac{PL}{8} = \frac{3}{16} PL$$

(b) Carga uniformemente distribuida en toda la luz, de intensidad  $p$ .

En la viga biempotrada, los momentos de empotramiento rígido son:

$$M_1^0 = \frac{pL^2}{12} = -M_2^0$$

y en la barra empotrada-articulada son

$$M_1^{0ea} = M_1^0 - \gamma_{21} M_2^0 = \frac{3}{2} \frac{pL^2}{12} = \frac{pL^2}{8}$$

La extensión de los anteriores conceptos y expresiones a barras no rectas y subestructuras es inmediata.

#### 7.7. ECUACION CONSTITUTIVA DE UNA BARRA

Considerando las definiciones anteriores de rigidez y coeficiente de reparto, así como el concepto de momento de empotramiento rígido, es posible determinar los momentos reacción que aparecen en los extremos 1 y 2 de una barra biempotrada (recta, curva o subestructura) sometida a unas cargas directamente aplicadas sobre ella, cuando estos extremos experimentan unos giros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  respectivamente (figura 7.24). Se supone que estos nudos extremos no se desplazan.

Los momentos finales  $M_1$  y  $M_2$  pueden calcularse como superposición de los tres estados que representa la figura: (0), empotramiento total en los extremos; (1) y (2), empotramiento en un extremo (1 ó 2) y articulación en el opuesto (2 ó 1). Se deduce, de este modo, la expresión

$$M_1 = M_1^0 + M_1^1 + M_1^2 = M_1^0 + R_1 \theta_1 + R_2 \gamma_{21} \theta_2$$

(7.36)

$$M_2 = M_2^0 + M_2^1 + M_2^2 = M_2^0 + R_2 \theta_2 + R_1 \gamma_{12} \theta_1$$



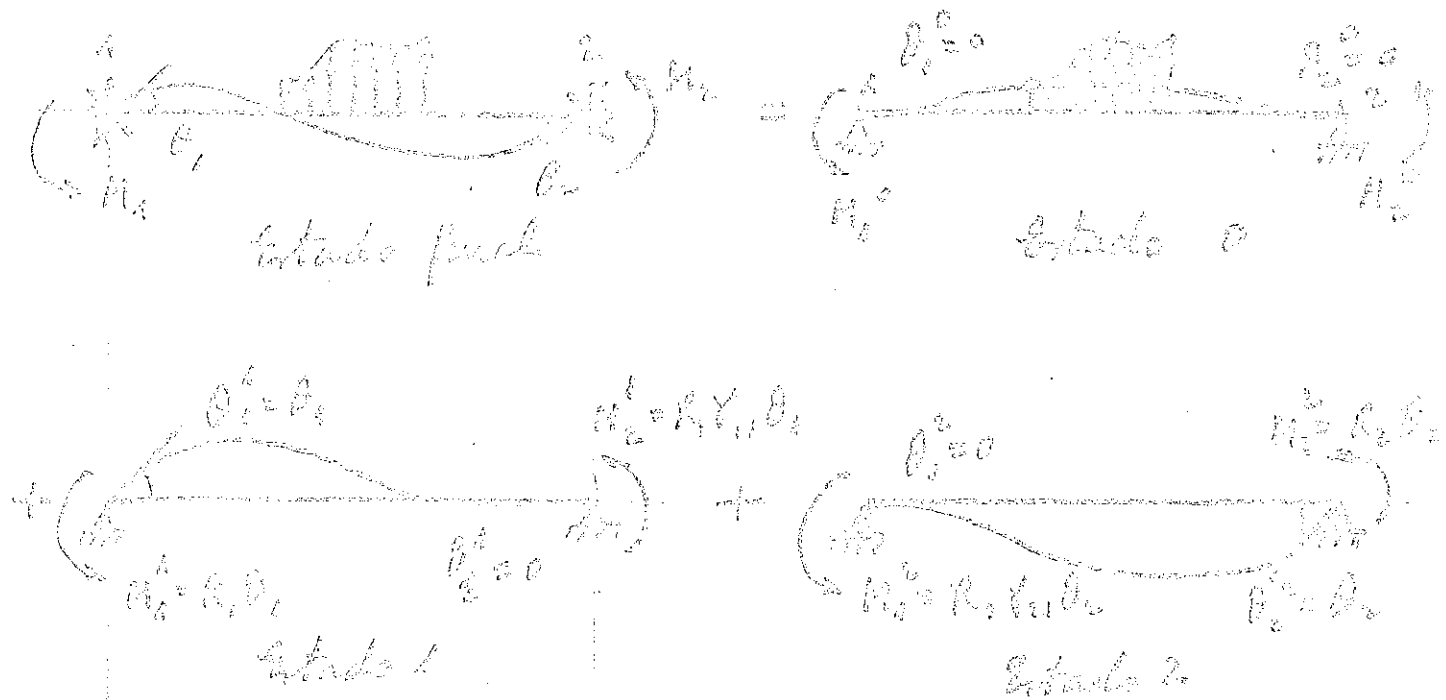


Figura 7.24. Ecuación constitutiva de una viga.

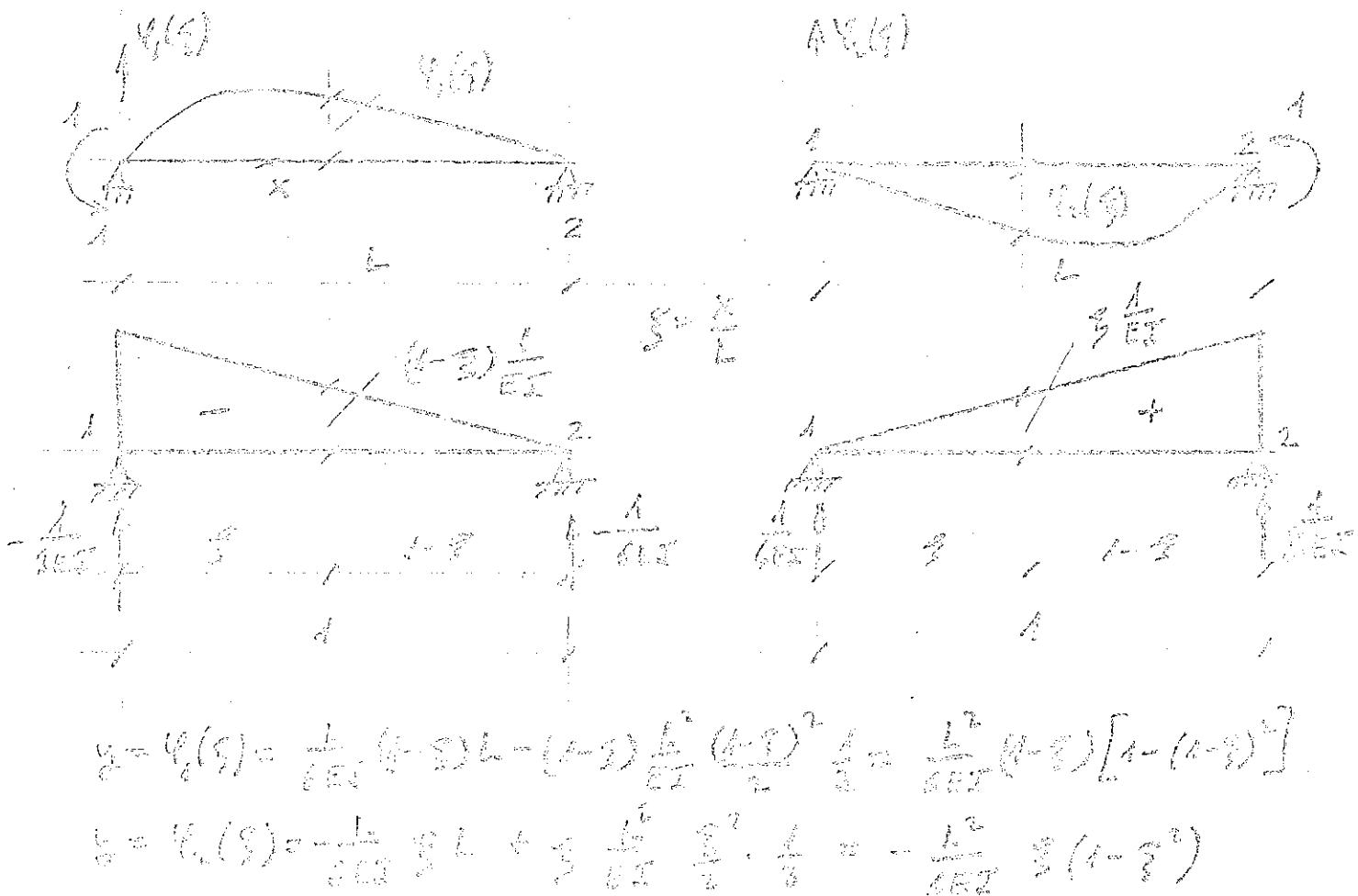


Figura 7.25. Ejemplo 7.11. Elástica de una viga de sección constante.

en donde  $M_1^0$  y  $M_2^0$  son los momentos de empotramiento rígido que aparecen en los extremos de la barra bajo la acción de la carga aplicada directamente sobre ella.

Los movimientos de cualquier sección de la barra se deducen, asimismo, como suma de los tres estados anteriores. Sin embargo, con frecuencia, es más eficiente considerar la situación de viga apoyada bajo las cargas directas y sendos momentos  $M_1$  y  $M_2$  en sus dos extremos.

Ejemplo 7.11. Ley de flechas ( $y$ ) verticales (elástica) de una viga de sección constante, bajo la acción de los momentos ( $M_1$  y  $M_2$ ) en sus extremos (figura 7.25). Se deduce de la figura 7.25 la siguiente expresión:

$$y = \frac{L^2}{6EI} \{M_1 \psi_1(\xi) - M_2 \psi_2(\xi)\}$$

$$\psi_1(\xi) = \xi(1-\xi)(2-\xi)$$

$$\psi_2(\xi) = \xi(1-\xi^2)$$

$$\psi_1(\xi) = -\psi_2(1-\xi)$$

$\xi = \frac{x}{L}$ , ( $x=0$  y  $x=L$  corresponden respectivamente a los extremos 1 y 2 de la barra).

Los valores de las funciones de  $\xi$  se resumen en la tabla siguiente con abscisas a décimos de luz.

$\xi$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1.0
$\psi_1(\xi)$	0,000	0,171	0,288	0,357	0,384	0,375	0,336	0,273	0,192	0,09	0,0
$\psi_2(\xi)$	0,000	-0,099	-0,192	-0,273	-0,336	-0,375	-0,384	-0,357	-0,288	-0,17	0,0

El interés de expresiones de este tipo se hará evidente más adelante al estudiar las líneas de influencia.

La extensión de las fórmulas 7.36 a barras no rectas y subestructuras es inmediata, así como al caso de articulación en un extremo. Así, se deducen para esta última situación, las fórmulas siguientes:

$$M_1 = M_1^{0ea} + R_1^{ea} \theta_1$$

(7.37a)

$$M_2 = 0$$

o bien

$$M_2 = M_2^{0ae} + R_2^{ae} \theta_2$$

(7.37b)

$$M_1 = 0$$

### EJERCICIOS. ENUNCIADOS

- 7.1. Calcular las flexibilidades de la barra recta de la figura 7.26. Aplicación para

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad k = 3$$

- 7.2. Calcular las flexibilidades de la barra recta de sección rectangular de ancho constante y canto variable linealmente, representada en la figura 7.27. Aplicación para:

$$\frac{I_2}{I_1} = 1$$

- 7.3. Calcular la rigidez y coeficientes de transmisión de las vigas representadas en la figura 7.28.
- 7.4. Se conocen en una viga de extremos 1 y 2 y longitud  $L$  las rigideces  $R_1$  y  $R_2$  y los coeficientes de transmisión  $\gamma_{12}$  y  $\gamma_{21}$ . Si se supone que está sustentada en voladizo, es decir, empotrada en el extremo 1 y libre en el 2, se desea conocer la flecha  $\Delta$  y el giro  $\theta_{21}^0$  que aparece en el extremo libre, bajo la actuación de una carga vertical unidad. ¿Cuál sería el ángulo girado,  $\theta_{22}$ , por dicho extremo, si la acción fuera un momento unidad?
- 7.5. Rigideces y coeficientes de transmisión de un arco circular de radio  $R$  y sección constante de características  $EI$ . El semiángulo en el centro es  $\alpha$ . No se considera la deformación axial ni de cortante. Figura 7. 29.
- 7.6. Se considera una viga compuesta de otras dos, de longitudes  $a$  y  $b$  y características respectivas  $R_1^a, R_2^a, \gamma_{12}^a, \gamma_{21}^a$  y  $R_1^b, R_2^b, \gamma_{12}^b, \gamma_{21}^b$ , como se indica en la figura 7.30. Se desea determinar sus rigideces y coeficientes de transmisión. Si se conocen los momentos de empotramiento rígido  $M_1^a, M_2^a$  y  $M_1^b, M_2^b$ , de cada una de las dos vigas bajo la acción de una carga

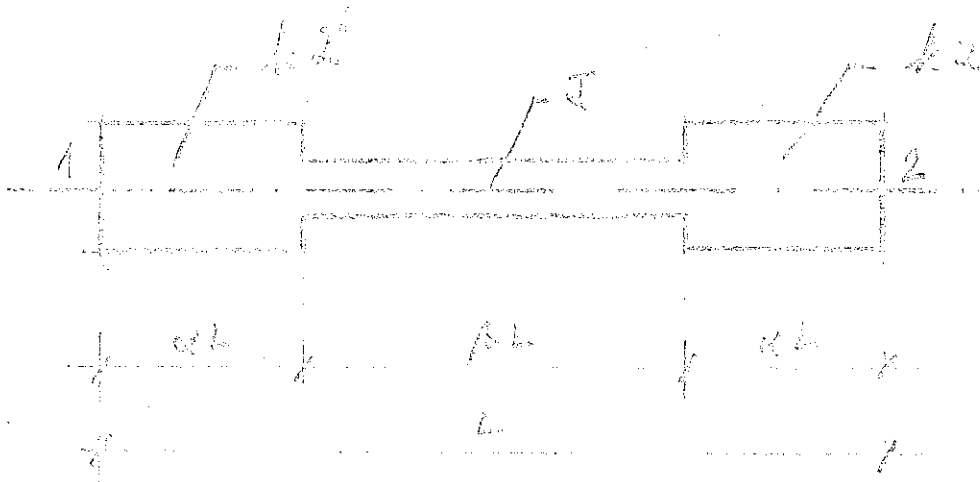


Figura 7.26. Ejercicio 7.1.

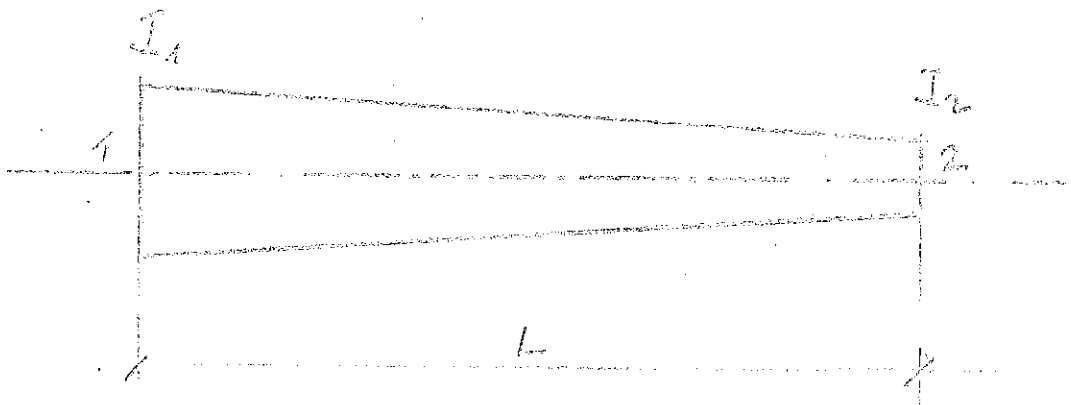


Figura 7.27. Ejercicio 7.2.

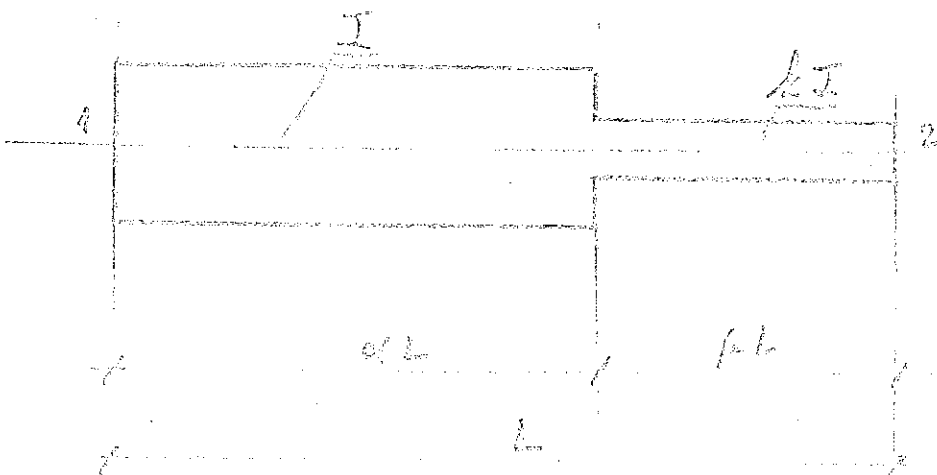


Figura 7.28(a). Ejercicio 7.3.

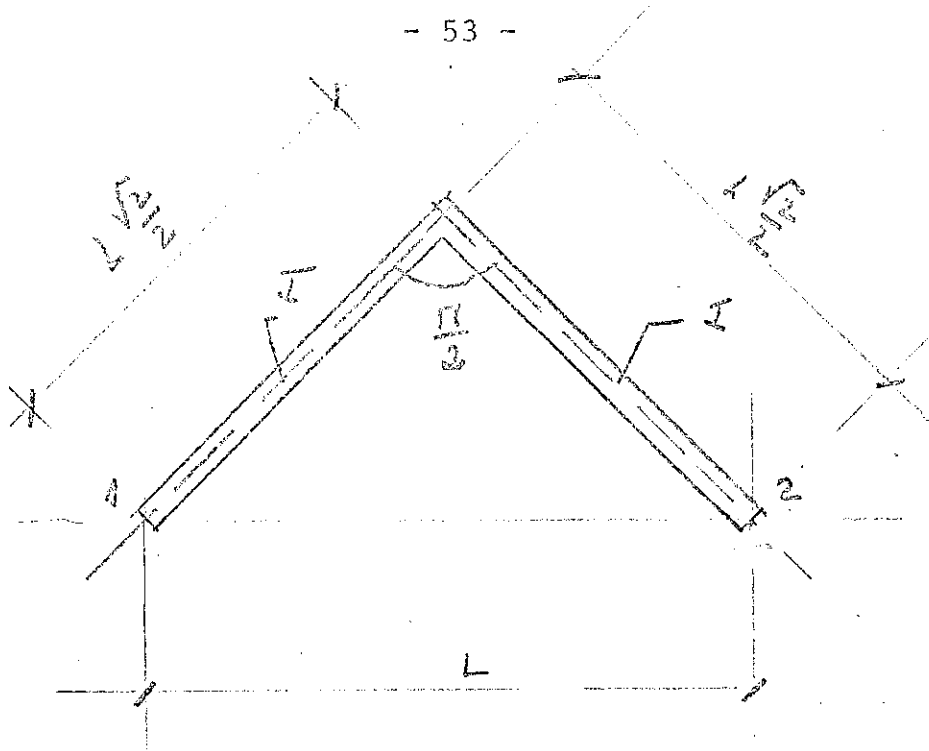


Figura 7.28 (b). Ejercicio 7.3.

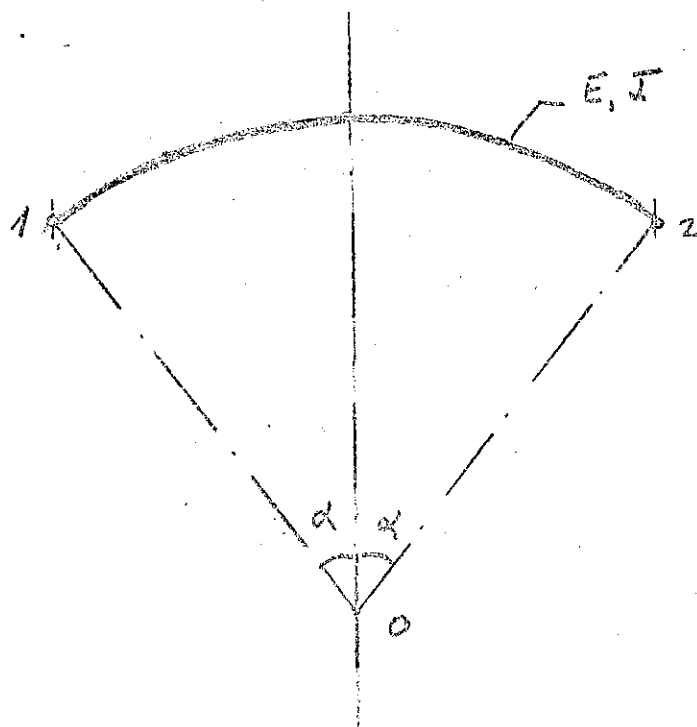


Figura 7.29. Ejercicio 7.5.

repartida de intensidad  $p$ , se pide calcular los momentos de empotramiento rígido de la viga compuesta.

7.7. Dada una viga continua de  $N$  vanos desiguales, constituidos por barras de luces  $l_n$  y características  $R_1^n, R_2^n, \gamma_{12}^n$  y  $\gamma_{21}^n$  ( $n=1,2,\dots,N$ ), se desea obtener una fórmula de recurrencia para el cálculo de las características  $\bar{R}_1^N, \bar{R}_2^N, \bar{\gamma}_{12}^N$  y  $\bar{\gamma}_{21}^N$  de la viga continua, considerada como una barra con dos nudos.

7.8. Determinar las características de una viga compuesta de  $N$  barras de longitudes  $l_n$  y características  $R_1^n, R_2^n, \gamma_{12}^n$  y  $\gamma_{21}^n$ , mediante una fórmula de recurrencia. Calcular sus momentos de empotramiento rígido bajo la acción de una carga uniforme de intensidad  $p$  en toda la luz, conociendo los momentos,  $M_1^n$  y  $M_2^n$  de empotramiento rígido de cada una de las barras, debidos a la misma carga uniforme  $p$ , usando, asimismo, una fórmula de recurrencia.

7.9. Determinar en la barra recta de la figura 7.31:

- a) Rigideces y coeficientes de transmisión.
- b) Momentos de empotramiento rígido por la actuación de las cargas gravitatorias siguientes:

- Carga uniforme de valor  $p$ .
- Carga puntual  $P$  aplicada en el centro del vano.
- Carga puntual  $P$  aplicada a cuarto de luz desde el extremo 1.

7.10. Determinar la rigidez y transmisión de la viga celosía regular de la figura (7.32). Comparar los resultados obtenidos con los aproximados según una teoría como viga recta sin deformación de cortante. Aplicación al caso:

$$n=2 ; \quad \alpha = \frac{H}{4} ; \quad \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4 = \Omega$$

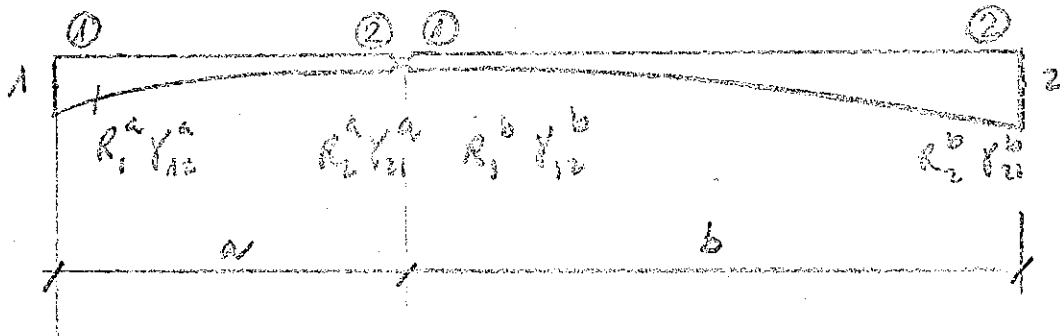


Figura 7.30. Ejercicio 7.6.

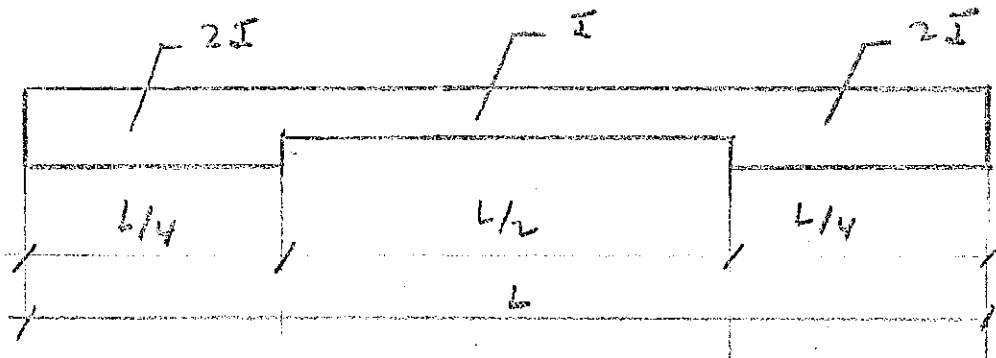


Figura 7.31. Ejercicio 7.9.

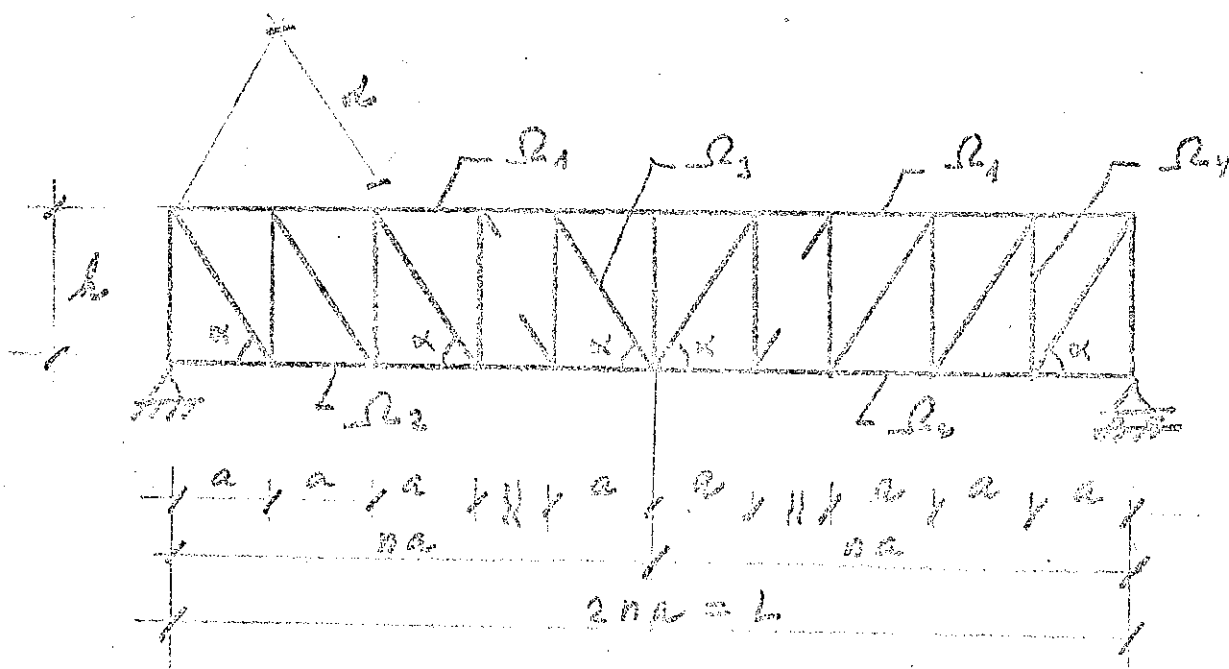


Figura 7.32. Ejercicio 7.10.



CAPITULO 7. EJERCICIOS. RESPUESTAS

$$7.1. f_{11} = \frac{L}{EI} \left\{ \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^3}{12} + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{3} - \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^3}{12} \right) \right\} = f_{22}$$

$$f_{12} = \frac{L}{EI} \left\{ \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^3}{12} + \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{6} - \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^3}{12} \right) \right\} = f_{21}$$

$$7.2. (a) f_{11} = \frac{L^2}{EI_1} \left\{ \frac{k-3}{2(k-1)^2} + \frac{\ln k}{(k-1)^3} \right\}$$

$$f_{22} = \frac{L^2}{EI_1} \left\{ \frac{1-3k}{2k^2(k-1)^2} + \frac{\ln k}{(k-1)^3} \right\}$$

$$f_{12} = \frac{L^2}{EI_1} \left\{ \frac{k+1}{2k(k-1)^2} - \frac{\ln k}{(k-1)^3} \right\}$$

Aplicación

$$f_{11} = 0,1816 \frac{L^2}{EI_1} \quad f_{22} = 0,0409 \frac{L^2}{EI_1}$$

$$f_{12} = -0,0504 \frac{L^2}{EI_1}$$

$$7.3. (a) R_1 = \frac{4EI}{L} \frac{k}{2\{\alpha k + \alpha\beta k + \beta^2 - \gamma_{12}(\alpha^2 k + \alpha\beta + \beta)\}}$$

$$R_2 = \frac{4EI}{L} \frac{k}{2\{\beta + \alpha\beta + \alpha^2 k - \gamma_{21}(\beta^2 + \alpha\beta k + \alpha^2 k)\}}$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{2} \frac{\beta^2(1+2\alpha) + k\alpha^2(1+2\beta)}{\beta(1+\alpha+\alpha^2) + k\alpha^3}$$

$$\gamma_{21} = \frac{1}{2} \frac{k\beta^2(1+2\beta) + \beta^2(1+2\alpha)}{k\alpha(1+\beta+\beta^2) + \beta^3}$$

Aplicación  $R_1 = \frac{48}{11} \frac{EI}{L} ; \quad R_2 = \frac{80}{11} \frac{EI}{L}$

$$\gamma_{12} = \frac{2}{5} ; \quad \gamma_{21} = \frac{2}{3}$$

(b) Ver ejemplo 7.9.  $R_1 = R_2 = 3,501 \frac{EI}{L} ; \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = -0,143$

$$7.4. \Delta = \frac{L^2}{R_1(1-\gamma_{12}\gamma_{21})} ; \quad \theta_{21} = \frac{(1+\gamma_{21})L}{R_1(1-\gamma_{12}\gamma_{21})}$$

$$\theta_{22} = \frac{2(1+\gamma_{21})}{R_1(1-\gamma_{12}\gamma_{21})}$$

$$7.6. R_1 = \frac{R_1^a R_2^b (1-\gamma_{12}^a \gamma_{21}^a) (1-\gamma_{12}^b \gamma_{21}^b) a^2}{R_2^b (1-\gamma_{12}^b \gamma_{21}^b) a^2 + R_1^a (1-\gamma_{12}^a \gamma_{21}^a) b^2}$$

$$R_2 = \frac{R_2^b R_1^a (1-\gamma_{21}^a \gamma_{12}^a) (1-\gamma_{12}^b \gamma_{21}^b) b^2}{R_2^b (1-\gamma_{12}^b \gamma_{21}^b) a^2 + R_1^a (1-\gamma_{12}^a \gamma_{21}^a) b^2}$$

$$\gamma_{12} = \frac{b}{a}$$

$$\gamma_{21} = \frac{a}{b}$$

$$M_1 = \frac{\frac{p}{2}(a+b) - \frac{M_1^a + \gamma_{21}^a M_2^a}{a} - \frac{M_1^b + \gamma_{12}^b M_1^b}{b}}{\frac{R_1^a}{a} (1-\gamma_{12}^a \gamma_{21}^a) \left\{ \frac{1}{2} (1-\gamma_{12}^a \gamma_{21}^a) + \frac{1}{2} (1-\gamma_{12}^b \gamma_{21}^b) \right\}}$$

$$M_2 = \frac{\frac{p}{2}(a+b) - \frac{M_1^a + \gamma_{21}^a M_2^a}{a} - \frac{M_1^b + \gamma_{12}^b M_1^b}{b}}{\frac{R_1^a}{a} (1-\gamma_{12}^a \gamma_{21}^a) \left\{ \frac{1}{2} (1-\gamma_{12}^a \gamma_{21}^a) + \frac{1}{2} (1-\gamma_{12}^b \gamma_{21}^b) \right\}}$$

$$7.9. \text{ a) } R_1 = R_2 = \frac{20EI}{3L} ; \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{3}{5}$$

$$\text{b) } M_1^0 = -M_2^0 = \frac{3}{32} PL^2$$

$$M_1^0 = -M_2^0 = \frac{7}{48} PL$$

$$M_1^0 = \frac{23PL}{144} ; \quad M_2^0 = -\frac{7PL}{144}$$

7.10. Se consideran dos estados de carga. Un momento unidad en un extremo de la viga -estado 1-, cuyos esfuerzos son, en la barra  $i$ ,  $N_i^1$  y un estado 2, debido a un momento unidad en el otro extremo de la viga, que produce los esfuerzos  $N_i^2$ .

Las flexibilidades  $f_{mn}$  ( $m, n = 1, 2$ ) son:

$$f_{mn} = \frac{NT}{\sum_{i=1}^N} N_i^m N_i^n \frac{1}{E\Omega_i}$$

con  $NT$  el número total de barras.

Se obtiene, entonces

$$f_{mn} = f_{mn}^{(1)} + f_{mn}^{(2)}$$

con  $f_{mn}^{(1)}$ , la flexibilidad debida a la flexión (esfuerzos en las cabezas de la viga) y  $f_{mn}^{(2)}$  las correspondientes al cortante (esfuerzos en las diagonales y montantes). Sus expresiones son:

$$f_{11}^{(1)} = f_{22}^{(1)} = \frac{1}{12na \operatorname{tg}^2 \alpha} \left\{ (8n^2 - 3n + 1) \frac{1}{E\Omega_1} + (8n^2 + 3n + 1) \frac{1}{E\Omega_2} \right\}$$

$$-f_{12}^{(1)} = -f_{21}^{(1)} = \frac{1}{12n a \operatorname{tg}^2 \alpha} \left\{ (n+1)(4n-1) \frac{1}{E\Omega_1} + (n-1)(4n+1) \frac{1}{E\Omega_2} \right\}$$

$$f_{11}^{(2)} = f_{22}^{(2)} = \frac{1}{2n a \cot \alpha} \left\{ \frac{1}{\sin^3 \alpha} \frac{1}{E\Omega_3} + \frac{1}{E\Omega_4} \right\} = f_{12}^{(2)} = f_{21}^{(2)}$$

Las flexibilidades como viga sin deformación a cortante, considerando que la flexión es resistida únicamente por las cabezas, pueden calcularse aproximadamente mediante las fórmulas:

$$f_{11}^* = f_{22}^* = \frac{1}{3EI} = \frac{1}{a \operatorname{tg}^2 \alpha} \left\{ \frac{2n}{3} \frac{1}{E\Omega_1} + \frac{2n}{3} \frac{1}{E\Omega_2} \right\}$$

$$-f_{12}^* = -f_{21}^* = \frac{1}{6EI} = \frac{1}{a \operatorname{tg}^2 \alpha} \left\{ \frac{n}{3} \frac{1}{E\Omega_1} + \frac{n}{3} \frac{1}{E\Omega_2} \right\}$$

Se comprueba que estas flexibilidades aproximadas, cuando  $n$  crece, se aproximan a las exactas.

Las rigideces que resultan son:

$$R_1 = R_2 = \frac{a \operatorname{tg}^2 \alpha}{2n \left( \frac{1}{\Omega_1} + \frac{1}{\Omega_2} \right)} \frac{\frac{8n^2-3n+1}{E\Omega_1} + \frac{8n^2+3n+1}{E\Omega_2} + 6 \operatorname{tg}^3 \alpha \left( \frac{1}{\sin^3 \alpha} \frac{1}{E\Omega_3} + \frac{1}{E\Omega_4} \right)}{\frac{2n^2-3n+1}{E\Omega_1} + \frac{2n^2+3n+1}{E\Omega_2} + 6 \operatorname{tg}^3 \alpha \left( \frac{1}{\sin^3 \alpha} \frac{1}{E\Omega_3} + \frac{1}{E\Omega_4} \right)}$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{\frac{(n+1)(4n-1)}{E\Omega_1} + \frac{(n-1)(4n+1)}{E\Omega_2} - 6 \operatorname{tg}^3 \alpha \left( \frac{1}{\sin^3 \alpha} \frac{1}{E\Omega_3} + \frac{1}{E\Omega_4} \right)}{\frac{8n^2-3n+1}{E\Omega_1} + \frac{8n^2+3n+1}{E\Omega_2} + 6 \operatorname{tg}^3 \alpha \left( \frac{1}{\sin^3 \alpha} \frac{1}{E\Omega_3} + \frac{1}{E\Omega_4} \right)}$$

Los valores aproximados de las rigideces, deducidos a partir de las flexibilidades  $f_{ij}^*$ , son:

$$R_1^* = R_2^* = \frac{4EI}{L} = \frac{a \operatorname{tg}^2 \alpha}{\left(\frac{1}{\Omega_1} + \frac{1}{\Omega_2}\right)} \frac{2}{n}$$

$$\gamma_{12}^* = \gamma_{21}^* = \frac{1}{2}$$

que tienden a los valores exactos cuando  $n$  crece.

La aplicación numérica conduce a los valores:

$$f_{11} = \frac{1}{8a} \left( \frac{9}{E\Omega_1} + \frac{13}{E\Omega_2} \right) + \frac{1}{4a} \left( \frac{2\sqrt{2}}{E\Omega_3} + \frac{1}{E\Omega_4} \right) = \frac{1}{E\Omega a} \left( 3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = f_{22}$$

$$f_{12} = - \frac{1}{8a} \left( \frac{7}{E\Omega_1} + \frac{3}{E\Omega_2} \right) + \frac{1}{4a} \left( \frac{2}{E\Omega_3} + \frac{1}{E\Omega_4} \right) = \frac{1}{E\Omega a} \left( -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = f_{21}$$

$$R_1 = R_2 = E\Omega a \frac{6 + \sqrt{2}}{8(2 + \sqrt{2})} \approx 0,271\Omega a$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{2 - \sqrt{2}}{6 + \sqrt{2}} \approx 0,079$$

y las aproximadas

$$f_{11}^* = \frac{1}{a} \left( \frac{4}{3} \frac{1}{E\Omega_1} + \frac{4}{3} \frac{1}{E\Omega_2} \right) = \frac{1}{E\Omega a} \frac{8}{3} = f_{22}^*$$

$$f_{12}^* = - \frac{1}{a} \left( \frac{2}{3} \frac{1}{E\Omega_1} + \frac{2}{3} \frac{1}{E\Omega_2} \right) = - \frac{1}{E\Omega a} \frac{4}{3} = f_{21}^*$$

$$R_1^* = \frac{E\Omega a}{2} = R_2^* ; \quad \gamma_{12}^* = \gamma_{21}^* = \frac{1}{2}$$

## 8. METODO DE CROSS. ESTRUCTURAS INTRASLACIONALES

### 8.1. PLANTEAMIENTO GENERAL DEL CALCULO EN MOVIMIENTO

Sea una estructura intraslacional sometida a unas cargas actuando indistintamente en nudos y barras. Desde un punto de vista de planteamiento en movimientos se puede calcular la estructura como suma de dos estados. En el primero, denominado inicial, se supone que no existen movimientos (giros) en los nudos. Para ello se introducen en estos unos momentos exteriores adicionales, que impiden las rotaciones de los mismos. El segundo estado de -carga, corresponde a la actuación de unos momentos en los nudos, opuestos a las reacciones del estado inicial -y por lo tanto los liberalizan- que permiten sus giros. Este segundo estado de carga se designa frecuentemente como estado modal o de movimientos. La figura 8.1. ilustra el cálculo de una estructura reticulada como suma de los dos estados anteriores.

Se comprende que el momento exterior que es preciso aplicar a cada nudo  $n$ ,  $\bar{M}_n$ , para que no gire bajo la acción de las cargas aplicadas, es igual a la suma de los momentos de empotramiento rígido en el extremo (1 ó 2) de cada barra  $i$  que conecta a dicho nudo menos el posible momento exterior actuante en dicho nudo  $n$  ( $M_n$ ). Se obtiene entonces:

$$\bar{M}_n = -M_n + \sum_{i \in N_1} M_{1i}^0 + \sum_{i \in N_2} M_{2i}^0 \quad (8.1)$$

con  $M_{1i}^0$  y  $M_{2i}^0$  los momentos de empotramiento rígidos en los nudos 1 y 2 respectivamente de la barra  $i$ .  $N_1$  e  $N_2$  son los conjuntos de barras cuyos extremos 1 y 2 coinciden en el nudo  $n$ . Esto implica que es preciso numerar los extremos de las barras, de acuerdo con un sentido de avance; normalmente, en estructuras en edificación, -puede adoptarse de abajo a arriba en pilares y de izquierda a derecha en dinteles.



Se comprende que en el estado inicial la estructura es compatible (cada barra se deforma como una viga biempotrada bajo las cargas directamente aplicadas sobre ella); sin embargo - los nudos no están en equilibrio, ya que el momento resultante sobre cada nudo  $n$ , tiene como valor .

$$M_n = \sum_{i \in N_1} M_{1i}^0 - \sum_{i \in N_2} M_{2i}^0$$

que, en general, es distinto de cero, siendo preciso introducir, - para que el nudo se encuentre en equilibrio con giro nulo (coacciones a la rotación), los momentos exteriores  $\bar{M}_n$ . En el segundo estado de cálculo, se liberan estas coacciones, mediante la aplicación en cada nudo de los momentos opuestos ( $-\bar{M}_n$ ), y se determinan los giros de los nudos de la estructura bajo estas cargas - concentradas en ellos. Este cálculo modal o en movimientos exige obtener el giro  $\theta_n$  de cada nudo, que, por continuidad de las barras, es preciso que los extremos de éstas coincidentes con el nudo sufran la misma rotación  $\theta_n$ . Esta determinación de los valores  $\theta_n$  de cada nudo implica la resolución del siguiente sistema de - ecuaciones, que expresan el equilibrio de momentos en cada nudo  $n$ :

$$-\sum_{i \in N_1} M_{1i}^1 - \sum_{i \in N_2} M_{2i}^1 + \bar{M}_n = 0 \quad (8.2)$$

en donde  $M_{1i}^1$  y  $M_{2i}^1$  son los momentos que aparecen respectivamente en los extremos 1 y 2 de la barra  $i$  cuando se producen unos giros en sus extremos,  $\theta_{1i}^1$  y  $\theta_{2i}^1$ . Estos momentos tienen, según el apartado 7.7, para una barra  $i$  que une los nudos  $n_1$  y  $n_2$ , la expresión siguiente:

NOTA (\*): Los valores negativos de los momentos  $M_{1i}^0$  y  $M_{2i}^0$  se deben a que se trata de acciones sobre nudo que son opuestas a las correspondientes de éste sobre cada barra.



$$\begin{aligned} M_{1i}^1 &= R_{1i} \theta_{1i}^1 + R_{2i} \gamma_{21i} \theta_{2i}^1 \\ M_{2i}^1 &= R_{2i} \theta_{2i}^1 + R_{1i} \gamma_{12i} \theta_{1i}^1 \end{aligned} \quad (8.3)$$

siendo  $R_{1i}$ ,  $R_{2i}$  las rigideces de la barra  $i$ , y  $\gamma_{12i}$  y  $\gamma_{21i}$  los coeficientes de transmisión.

Los giros  $\theta_{1i}^1$  y  $\theta_{2i}^1$  que aparecen en los extremos 1 y 2 de la barra, deben de coincidir, por continuidad, con las rotaciones de los nudos  $n1$  y  $n2$ , es decir:

$$\theta_{1i}^1 = \theta_{n1} \quad \text{y} \quad \theta_{2i}^1 = \theta_{n2} \quad (8.4)$$

El sistema (8.2) corresponde a  $N$  ecuaciones (una por cada nudo) y tiene como incógnitas las rotaciones desconocidas  $\theta_n$  de cada nudo genérico  $n$ .

Con este segundo estado, la estructura alcanza su posición de equilibrio mediante giro de todos sus nudos. El estado final corresponde a la suma de los estados inicial y modal, y permite calcular los valores de las reacciones  $M_{1i}$ ,  $M_{2i}$  que aparecen en cada extremo (1 y 2) de la barra  $i$ , es decir:

$$\begin{aligned} M_{1i} &= M_{1i}^0 + M_{1i}^1 \\ M_{2i} &= M_{2i}^0 + M_{2i}^1 \end{aligned} \quad (8.5)$$

Una vez conocidos los valores ( $M_{1i}$  y  $M_{2i}$ ) de los momentos en los extremos de cada barra, la determinación de las leyes de esfuerzos sigue la pauta indicada en el apartado 7.3.2. del capítulo anterior.

Se comprende que la mayor dificultad de este método en movimientos reside en la resolución del sistema (8.2), puesto que el número de incógnitas es igual al de nudos de la estructura, lo que impide un cálculo convencional en estructuras normales con

un número elevado de nudos. El método de Cross permite obtener, la resolución del sistema (8.2) mediante aproximaciones sucesivas, que presentan un elevado contenido físico e intuitivo, y que utiliza, reiteradamente, únicamente dos operaciones de cálculo: - reparto de nudos y transmisión a lo largo de barras, que se expondrán en el siguiente apartado.

Ejemplo 8.1. Calcular la viga continua de dos vanos - iguales bajo la acción de una carga uniforme extendida a uno de ellos. Se utilizará un método en movimientos (figura 8.2).

El estado inicial, correspondiente al empotramiento rígido en todos los nudos, supone introducir los momentos exteriores en cada nudo (figura 8.2b):

$$M_1^0 = 0, M_2^0 = \frac{pL^2}{12} \quad \text{y} \quad M_3^0 = - \frac{pL^2}{12}$$

La liberación de los nudos se lleva a cabo mediante la introducción de los momentos exteriores contrarios a los anteriores, que producen los giros incógnitas  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$ , como se muestra en la figura 8.2c y la aparición de los momentos  $M_{1i}^1$  y  $M_{2i}^2$  sobre los extremos de cada barra.

La aplicación de las ecuaciones constitutivas (8.3) a cada barra conduce a las siguientes expresiones, en las que se ha supuesto que las barras eran prismáticas y de sección constante:

$$(R = \frac{4EI}{L} \quad \text{y} \quad \gamma = 0.5)$$

Barra 1 = 1-2.

$$M_1 = M_{11}^1 = R \theta_1 + R \gamma \theta_2$$

$$M_2 = M_{21}^1 = R \theta_2 + R \gamma \theta_1$$

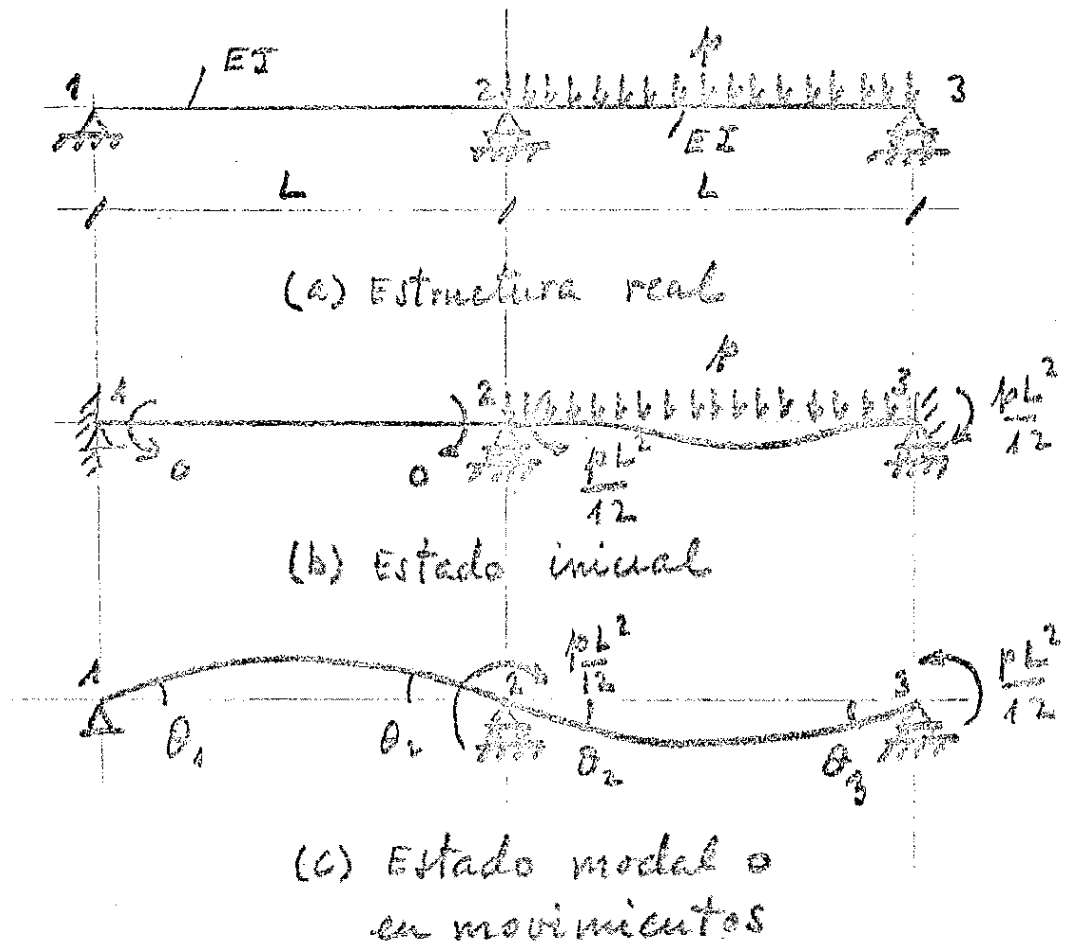


Figura 8.2. Ejemplo 8.1.

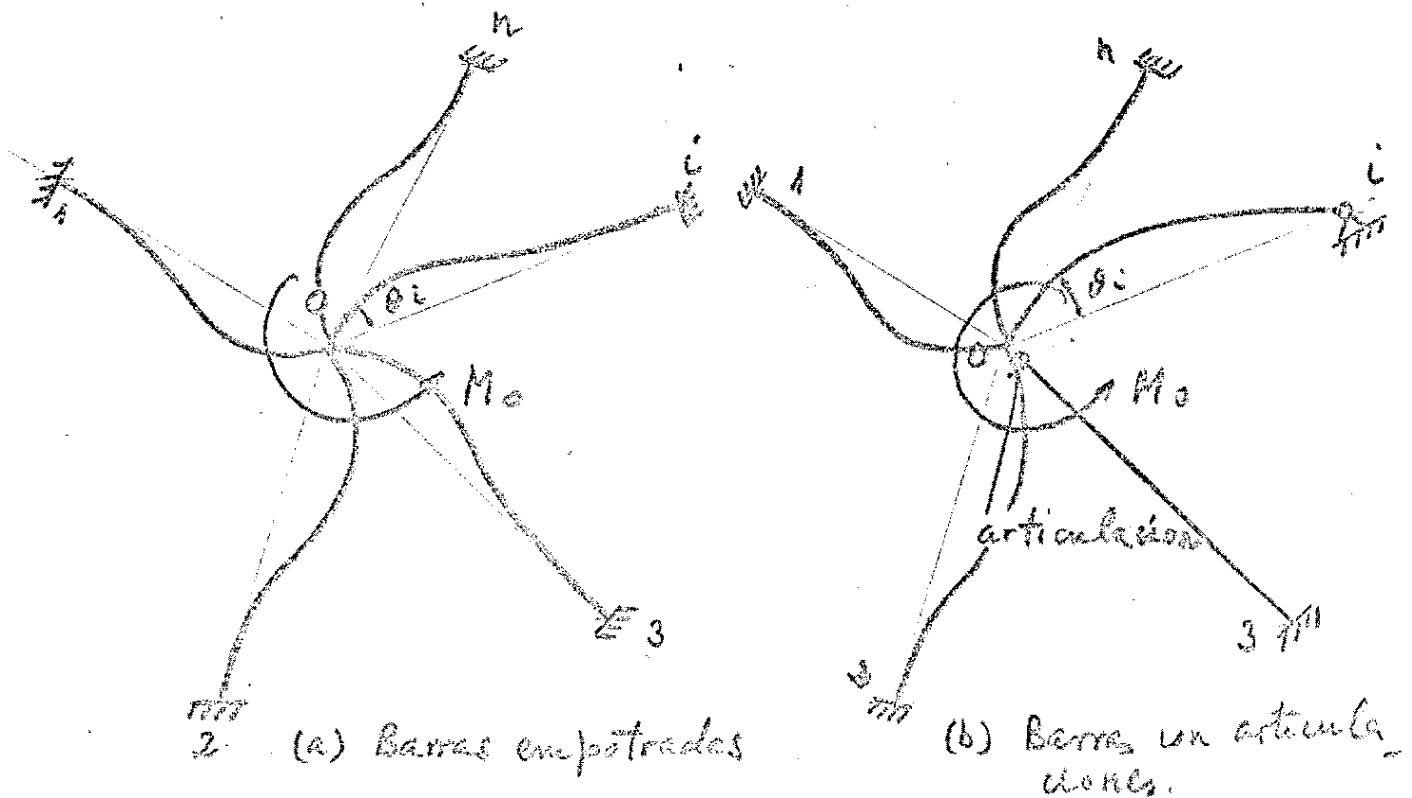


Figura 8.3. Estructura con un nudo activo.

Barra 2 = 2-3.

$$M_2 = M_{12}^1 = R \theta_2 + R \gamma \theta_3$$

$$M_3 = M_{22}^1 = R \theta_3 + R \gamma \theta_2$$

Las condiciones de equilibrio en cada nudo son

$$M_{11}^1 = 0$$

$$M_{21}^1 + M_{12}^1 + M_2^0 = 0$$

$$M_{22}^1 + M_3^0 = 0$$

es decir

$$\theta_1 + 0.5 \theta_2 = 0$$

$$R(\theta_2 + 0.5 \theta_1 + 0.5 \theta_3) + \frac{pL^2}{12} = 0$$

$$R(\theta_3 + 0.5 \theta_2) - \frac{pL^2}{12} = 0$$

cuya resolución conduce a los valores:

$$\theta_1 = \frac{pL^3}{96EI} ; \quad \theta_2 = -\frac{pL^3}{48EI} \quad y \quad \theta_3 = \frac{pL^3}{32EI}$$

Los momentos que aparecen en los extremos de cada barra son (fórmula 8.3):

$$M_1 = M_{11}^1 = \frac{4EI}{L}(\theta_1 + 0.5 \theta_2) = 0$$

$$M_2 = M_{21}^1 = \frac{4EI}{L}(\theta_2 + 0.5 \theta_1) = -\frac{pL^2}{16}$$

Barra 2 = 2-3.

$$M_2 = M_{12}^1 = \frac{4EI}{L}(\theta_2 + 0.5 \theta_3) = - \frac{pL^2}{16}$$

$$M_3 = M_{22}^1 = \frac{4EI}{L}(\theta_3 + 0.5 \theta_2) = \frac{pL^2}{12EI}$$

y los momentos finales, en los extremos de cada barra, son:

Barra 1-2:

$$M_1 = 0 \quad ; \quad M_2 = - \frac{pL^2}{16}$$

Barra 2-3:

$$M_2 = \frac{pL^2}{12} - \frac{pL^2}{48} = \frac{pL^2}{16} \quad ; \quad M_3 = - \frac{pL^2}{12} + \frac{pL^2}{12} = 0$$

## 8.2. EL METODO DE CROSS

### 8.2.1. Estructuras con un solo nudo activo

Previamente a la exposición general del método de Cross, es conveniente considerar el caso simple de una estructura de  $n$  - barras concurrentes en un único nudo, 0, no coaccionado al giro (nudo activo). La figura 8.3 ilustra esta situación y se supone inicialmente que existe un momento exterior  $M_0$  actuando en dicho nudo.

Como el nudo 0 es rígido, los giros que aparecen en los extremos de las barras coincidentes con el nudo 0, son iguales - entre sí y cuyo valor incógnita,  $\theta_0$ , se determina de acuerdo con las siguientes consideraciones. (Se utiliza numeración global de las barras):

Sea  $M_{0i}$  el momento que actúa sobre la barra 0-i en su extremo 0. Según la definición de rigidez de la barra 0-i en su

extremo 0, se puede escribir, para cada una de ellas:

$$\theta_0 = \frac{M_{0i}}{R_{0i}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8.6)$$

Por otra parte, el nudo 0 se encuentra en equilibrio, por lo que debe de cumplirse la condición

$$\sum_{i=1}^n (-M_{0i}) + M_0 = 0 \quad (8.7)$$

en donde el signo negativo de  $M_{0i}$ , corresponde al momento actuando sobre el nudo y que es opuesto a  $M_{0i}$ .

Combinando las ecuaciones (8.6) y (8.7) se deduce

$$\theta_0 = \frac{M_{0i}}{R_{0i}} = \frac{\sum_{i=1}^n M_{0i}}{\sum_{i=1}^n R_{0i}} = \frac{M_0}{\sum_{i=1}^n R_{0i}}$$

es decir

$$M_{0i} = \frac{R_{0i}}{\sum_{i=1}^n R_{0i}} M_0 = k_{0i} M_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8.8)$$

Por lo tanto, se puede concluir que el momento externo - al nudo 0,  $M_{0n}$ , se reparte entre las barras concurrentes en dicho nudo proporcionalmente a sus rigideces. Es conveniente calcular - el coeficiente de reparto o proporción de momento exterior que resiste cada barra  $i$ , en el nudo común 0, mediante la expresión

$$\gamma_{0i} = \frac{R_{0i}}{\sum_{i=1}^n R_{0i}} \quad (8.9)$$

Los momentos que aparecen en los extremos rígidamente empotrados de la estructura, nudos opuestos en cada barra del nudo 0, son:

$$M_{i0} = \gamma_{0i} M_{0i} = \gamma_{0i} \gamma_{0i} M_0 \quad (8.10)$$

Por último, el giro  $\theta_0$  del nudo 0 se deduce mediante (8.6), es decir

$$\theta_0 = \frac{M_{0i}}{R_{0i}} = \frac{\sum_{i=1}^n M_{0i}}{\sum_{i=1}^n R_{0i}} = \frac{M_0}{\sum_{i=1}^n R_{0i}} \quad (8.11)$$

Las fórmulas anteriores permiten calcular los momentos en los extremos de las barras de una estructura con un solo nudo activo bajo la acción de un momento exterior aplicado en el mismo, mediante dos tipos de operaciones:

- (1) Reparto del momento exterior en un conjunto de momentos aplicados en los extremos de las distintas barras concurrentes. Este reparto se lleva a cabo mediante la ecuación (8.8) que representa el equilibrio de momentos en el nudo.
- (2) Transmisión de los momentos, es decir, obtención de los momentos actuando en los extremos opuestos de cada barra al nudo activo de la estructura. Esta transmisión implica el equilibrio de la barra y se realiza por medio de la fórmula (8.10).

Las dos operaciones de cálculo -reparto o equilibrio del nudo y transmisión o equilibrio de cada barra- representan la resolución del sistema (8.2) en el caso de una sola incógnita: el giro  $\theta_0$  del nudo 0.

El cálculo anterior puede extenderse a estructuras con barras articuladas, ya en el nudo 0 o en el extremo opuesto. En

estos casos las fórmulas 8.8 y 8.10 siguen siendo válidas, suponiendo que se adoptan como rigideces y coeficientes de transmisión de las barras los valores pertinentes, correspondientes a la situación empotrada-apoyada o viceversa, según el caso, de acuerdo con lo expuesto en el apartado 7.6. En particular si la barra  $i$  se encuentra articulada en el extremo 0, se deduce

$$M_{0i} = 0 \quad \text{y} \quad M_{i0} = 0$$

y por lo tanto debe de suponerse en el cálculo el valor siguiente para la rigidez de la barra.

$$R_{0i} = 0$$

En el caso de articulación en el extremo  $i$  de la barra 0- $i$  (figura 8.3b) se debe considerar como rigidez de la barra la dada por la fórmula (7.34), es decir,

$$R_{0i}^{ea} = R_{0i} (1 - \gamma_{0i} \gamma_{i0})$$

y como coeficiente de transmisión

$$\gamma_{0i}^{ea} = 0$$

Evidentemente el ángulo de giro del nudo 0, se obtiene según la expresión 8.11, y para la barra 0- $i$  con el extremo  $i$  opuesto articulado, el ángulo que se produce en este extremo  $i$  es, según la ecuación 7.28:

$$\theta_{i0} = -\gamma_{0i} \frac{1 - \gamma_{0i} \gamma_{i0}}{R_{i0}} M_{0i} \quad (8.12)$$

### 8.2.2. Estructura general

Se intenta ahora obtener los momentos que se producen en las distintas barras de una estructura de  $n$  nudos no coaccio



nados al giro, bajo la acción de momentos exteriores aplicados en dichos nudos. Este cálculo corresponde al análisis del estado modal comentado en el apartado 8.1 y fue llevado a cabo por primera vez por Cross utilizando las técnicas de reparto y transmisión, - indicadas anteriormente para el caso de estructura con un solo nudo activo.

En el método de Cross, una vez numerados los nudos de la estructura, se empotran, es decir, se introducen coacciones - al giro en todos los nudos a excepción del primero (\*). Esta situación estructural ha sido estudiada en el apartado 8.2.1 y únicamente en las barras incidentes con el nudo 1 se producen unos momentos  $M_{1i}^{(1)}$  y  $M_{i1}^{(1)}$  debidos al giro del nudo 1,  $\theta_1^{(1)}$ . El superíndice (1) se introduce aquí para indicar el carácter paso a paso del método de Cross y corresponde a los valores de la primera etapa. Los momentos  $M_{1i}^{(1)}$  se obtienen mediante la operación reparto alrededor del nudo 1 y conducen al equilibrio del mismo, es decir, se satisface en el nudo 1:

$$\sum_{i \in I_1} M_{1i}^{(1)} = M_1$$

siendo  $I_1$  el conjunto de barras con un extremo coincidente con el nudo 1.

$M_1$  es el momento exterior actuando en el nudo 1.

Por otra parte, en los extremos opuestos al nudo 1, en las distintas barras que en él concurren, se producen, mediante el mecanismo de la transmisión, momentos  $M_{i1}^{(1)}$  cuyos valores vienen dados por la expresión:

$$M_{i1}^{(1)} = \gamma_{1i} M_{1i}^{(1)}$$

NOTA (\*): Este empotramiento equivale inicialmente a introducir en cada nudo un momento opuesto al exterior actuante.

Se comprende ahora que el empotramiento ficticio existente en los nudos  $i \in I_1$  supone la introducción de este momento adicional al momento existente, que en este caso corresponde al valor opuesto al momento exterior  $M_i$ . Así pues, en el nudo  $i$ , el empotramiento implica la aparición de un momento ficticio - igual a  $-M_i + M_{i1}^{(1)}$ .

A continuación se empotra el nudo 1, es decir, se supone que no puede sufrir ningún giro adicional al  $\theta_1^{(1)}$  existente. Como este nudo está en equilibrio, no es precisa inicialmente la introducción de ningún momento ficticio de empotramiento. A continuación, se liberaliza el nudo 2, o, equivalentemente, se admite que puede girar. Para ello, se anula el momento exterior ficticio (procedente del empotramiento introducido anteriormente) sumando un momento de valor opuesto, que se reparte y transmite de acuerdo con las indicaciones del apartado 8.2.1, obteniéndose así los momentos en los extremos de las barras concurrentes con el nudo 2:  $M_{2i}^{(1)}$  y  $M_{i2}^{(1)}$ . Evidentemente estos momentos desequilibran el nudo 1, ya que aparece el momento de transmisión  $M_{12}^{(1)}$  en el empotramiento del nudo 1. Sin embargo, estos momentos de desequilibrio serán tratados en una segunda etapa de cálculo.

De esta forma se procede con todos los nudos de la estructura, es decir, empotrando el nudo  $i$  (liberalizado en el reparto y transmisión inmediatamente anterior) y liberalizando a su vez el nudo siguiente,  $i+1$ , (mediante introducción de un momento contrario que anule al ficticio existente en el empotramiento supuesto en el análisis anterior) y procediendo al reparto y transmisión de este momento introducido en el nudo. Se obtiene entonces la estructura con sus nudos girados  $\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \dots, \theta_n^{(1)}$  y empotrados, en general, con unos momentos de empotramiento ficticios no nulos que equilibran cada nudo, ya que han aparecido - momentos de desequilibrio procedentes de las transmisiones posteriores al análisis-reparto y transmisión- propios del nudo en cuestión. Esta situación es completamente análoga a la inicial de cálculo, y, por lo tanto, se comienza otro ciclo de aproximación, consistente en alcanzar el equilibrio de cada nudo, mediante libera-

lizaciones de los sucesivos nudos, desde el primero al n-siro con lo que se produce unos nuevos incrementos de giros

$$\theta_1^{(2)}, \theta_2^{(2)}, \dots, \theta_n^{(2)}$$

y los correspondientes valores de los momentos en los extremos de las diferentes barras ( $M_{ij}^{(2)}, M_{ji}^{(2)}$ ). De esta forma se puede llevar a cabo las sucesivas etapas de cálculo, cada una de ellas, (k), permite equilibrar los momentos que aparecen en los nudos procedentes de las transmisiones posteriores al análisis propio de cada nudo en la etapa previa (k-1) del cálculo. Se puede mostrar que este proceso es convergente, es decir, a partir de una cierta etapa del cálculo (K), los momentos residuales de desequilibrio son suficientemente pequeños, dentro de la aproximación requerida en el análisis. Los valores finales del cálculo son:

Momento en el extremo i de la barra i-j:

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^K M_{ij}^{(k)} \quad (8.13)$$

Giro en el nudo n

$$\theta_n = \sum_{k=1}^K \theta_n^{(k)} \quad (8.14)$$

Se observa que en el método de Cross el estado final de cálculo se obtiene como suma de estados de la estructura compatibles pero con nudos en desequilibrio con los momentos exteriores, pero que en el límite se alcanza una situación compatible y totalmente equilibrada.

En la práctica del método de Cross, se suelen calcular las estructuras, con cargas indistintamente en nudos y barras, de un modo conjunto como suma de los estados inicial o de empotramiento rígido en todos los nudos, más el modal o debido al giro de los nudos de la estructura. Por otra parte, es usual en el método de Cross efectuar, dentro de cada etapa (k), el equilibrio

de los momentos en desequilibrio procedentes de la etapa anterior -  
(k-1), sin considerar las modificaciones de estos producidas por las  
transmisiones dentro de la propia etapa k. Estas modificaciones de -  
momentos se equilibran en la siguiente etapa (k+1). El proceso de -  
cálculo así llevado a cabo presenta una menor convergencia que si -  
se realizase de acuerdo con los criterios comentados anteriormente.  
Sin embargo esta mayor lentitud -normalmente no muy importante- se  
compensa por una mejor y más clara disposición del procedimiento de  
cálculo. El ejemplo siguiente ilustra la aplicación del método de -  
Cross.

Ejemplo 8.2. Calcular las leyes de esfuerzos en la es-  
tructura reticulada de la figura 8.4. Todas las vigas son de sec-  
ción rectangular con las siguientes dimensiones en m:

Barra.	Canto.	Ancho
1-2	0,50	0,25
1-3	0,25	0,25
2-4	0,25	0,25
3-4	0,60	0,35
3-5	0,25	0,25
4-6	0,25	0,25

El módulo de elasticidad de todas las barras es

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}.$$

Los pasos a seguir en el cálculo de Cross son:

1) Determinación de las características elastomecánicas  
de todas las barras ( $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{21}$ ).

2) Obtención de los coeficientes de reparto ( $k_{ij}$ ), en  
todos los extremos de barras concurrentes en un nudo.

Conviene tener en cuenta que muchas veces no es preci-  
so el cálculo de las rigideces de la barra ya que pueden ser utili-  
zados valores proporcionales en la deducción de los coeficientes -  
de reparto. Así, si las barras que concurren en un nudo son rectan



gulares del mismo ancho, pueden adoptarse como rigideces los valores proporcionales

$$\frac{h_i^3}{L_i}$$

con  $h_i$  y  $L_i$  el canto y longitud de las barras. Incluso si todas ellas son de sección idéntica, los coeficientes de reparto serían proporcionales a las inversas de las luces de las vigas ( $\frac{1}{L_i}$ ). Evidentemente, la suma de los coeficientes de reparto alrededor de un nudo es siempre la unidad. Las consideraciones anteriores no son adecuadas, como se verá mas adelante, en la determinación de los movimientos de la estructura, ya que en estos casos es preciso utilizar los valores reales, no proporcionales, de las rigideces de las barras.

3) Cálculo de los momentos de empotramiento rígido ( $M_1^0$  y  $M_2^0$ ) de cada barra cargada.

4) Proceder al reparto del momento de desequilibrio en cada nudo. Este momento es suma del exterior actuante en el nudo más los momentos opuestos a los de empotramiento rígido existentes en las barras que concurren en el nudo. Los momentos repartidos se denominan  $M^{(1)}$ .

5) Transmisión de los momentos repartidos, es decir, obtención de los momentos  $M^{(2)}$ .

6) Proceder al reparto de los momentos desequilibrantes (contrarios a la suma alrededor del nudo de los momentos transmitidos) y transmisión de estos momentos repartidos un número de veces suficiente con la aproximación requerida. Estos momentos se designan en el análisis por

$$M^{(2k+1)}, M^{(2k+2)} \text{ con } k = 1, 2, \dots, K.$$

7) Efectuar la suma de los momentos que aparecen en los extremos de cada barra procedentes de los pasos anteriores de cálculo, es decir, para cada extremo  $i (i=1,2)$  de la barra  $j$ :

$$M_{ij} = M_{ij}^0 + \sum_{k=1}^K M_{ij}^{(2k+1)} + \sum_{k=1}^K M_{ij}^{(2k)} = M_{ij}^0 + M_{ij}^1 \quad (8.15)$$

en donde  $M_{ij}^0$  y  $M_{ij}^1$  son los momentos de los estados inicial y modal respectivamente.

8) Una vez obtenidos los momentos en los extremos de cada barra, las leyes de esfuerzos se deducen de acuerdo con los criterios expuestos en el apartado 7.3.2.

Así pues, en este caso se obtienen los siguientes resultados en cada paso del cálculo:

1) Como se consideran barras de sección constante las rigideces son:

$$R_1 = R_2 = \frac{4EI}{L}$$

y los coeficientes de transmisión  $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 0.5$ ; por lo tanto se puede escribir la siguiente tabla 8.1.

TABLA 8.1. Cálculo de las características elastomecánicas de las barras

BARRA	b (m)	h (m)	$I = \frac{bh^3}{12}$ (m <sup>4</sup> )	E (t m <sup>-2</sup> )	L (m)	$R = \frac{4EI}{L}$ (mt)	$\gamma$
1-2	0.25	0.50	$2.60 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^6$	5.0	4160	0.5
1-3	0.25	0.25	$0.32 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^6$	3.0	853	0.5
2-4	0.25	0.25	$0.32 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^6$	3.0	853	0.5
3-4	0.25	0.60	$4.50 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^6$	5.0	7200	0.5
3-5	0.25	0.25	$0.32 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^6$	4.272	599	0.5
4-6	0.25	0.25	$0.32 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^6$	4.272	599	0.5

2) Los coeficientes de reparto se obtienen según la fórmula 8.9 y su cálculo se muestra en la tabla 8.2, operativa del método de Cross.

3) Los momentos de empotramiento rígido se deducen de un modo inmediato al corresponder a barras de sección constante, resultando:

Barra 1-2:

$$M_1^0 = -M_2^0 = p \frac{L^2}{12} = 2 \frac{5^2}{12} = 4,17 \text{ mt.}$$

Barra 3-4:

$$M_3^0 = M_4^0 = -\frac{M}{4} = -\frac{10}{4} = -2,5 \text{ mt.}$$

Barra 2-4:

$$M_2^0 = -p \frac{a(L-a)}{L^2} = -5 \frac{2 \cdot 1^2}{9} = 1,11 \text{ mt.}$$

$$M_4^0 = p \frac{a^2(L-a)}{L^2} = 5 \frac{2^2 \cdot 1}{9} = 2,22 \text{ mt.}$$

Barra 3-5:

$$M_3^0 = -M_5^0 = -p \frac{h^2}{12} = -1 \frac{1,5^2}{12} = -0,19 \text{ mt.}$$

4) El reparto de los momentos exteriores sobre los nudos (suma del momento real actuante más los opuestos a los de empotramiento rígido de las barras incidentes) se efectúa multiplicando por los correspondientes coeficientes de reparto como se indica en la tabla 8.2.

5) La transmisión de momentos se lleva a cabo multiplicando los valores de las barras i-j por el coeficiente  $\gamma$ , y colocando el resultado en la barra j-i.



TABLA 8.2. DISPOSICION DEL METODO DE CROSS

Observaciones	Nudo	1		2		3		4				5	6
	Barra	1-2	1-3	2-1	2-4	3-1	3-4	3-5	4-2	4-3	4-6	5-3	5-4
Rigidez	R	4160	853	4160	853	853	7200	599	853	7200	599	599	599
Coef. Reparto	k	0,830	0,170	0,830	0,170	0,099	0,832	0,069	0,099	0,832	0,069	0	0
Coef. Transm.	$\gamma$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
Momento (Imp.)	$M^0$	4,17	0	-4,17	-1,11	0	-2,50	-0,19	2,22	-2,50	0	0,19	0
Reparto	$M^1$	-3,46	-0,71	4,38	0,90	0,27	2,24	0,18	0,03	0,23	0,02	0	0
Transmisión	$M^2$	2,19	0,14	-1,73	0,01	-0,36	0,12	0	0,45	1,12	0	0,09	0,01
Reparto	$M^3$	-1,93	-0,39	1,43	0,29	0,02	0,20	0,02	-0,16	-1,31	-0,10	0	0
Transmisión	$M^4$	0,72	0,01	-0,97	-0,08	-0,20	-0,66	0	0,15	0,10	0	0,01	-0,05
Reparto	$M^5$	-0,61	-0,12	0,87	0,18	0,09	0,72	0,05	-0,02	-0,21	-0,02	0	0
Transmisión	$M^6$	0,44	0,05	-0,32	-0,01	-0,06	-0,11	0	0,09	0,36	0	0,03	-0,01
Reparto	$M^7$	-0,41	-0,08	0,27	0,06	0,02	0,14	0,01	-0,04	-0,37	-0,04	0	0
FINAL	M	1,10	-1,10	-0,24	0,24	-0,22	-0,15	0,07	2,72	-2,58	-0,14	0,32	-0,05

6) Los repartos y transmisiones se efectúan como en las etapas 4 y 5 anteriores y debe tenerse en cuenta que al no existir ahora momentos reales sobre los nudos, la operación de reparto implica la multiplicación por los coeficientes  $k_i$  de los momentos de empotramiento en el nudo

$$M_n^{2k+1} = \sum_{i \in I_n} M_i^{(2k+1)}$$

cambiando de signo a los resultados, ya que el momento liberalizador del nudo es el opuesto a

$$M_n^{(2k+1)}$$

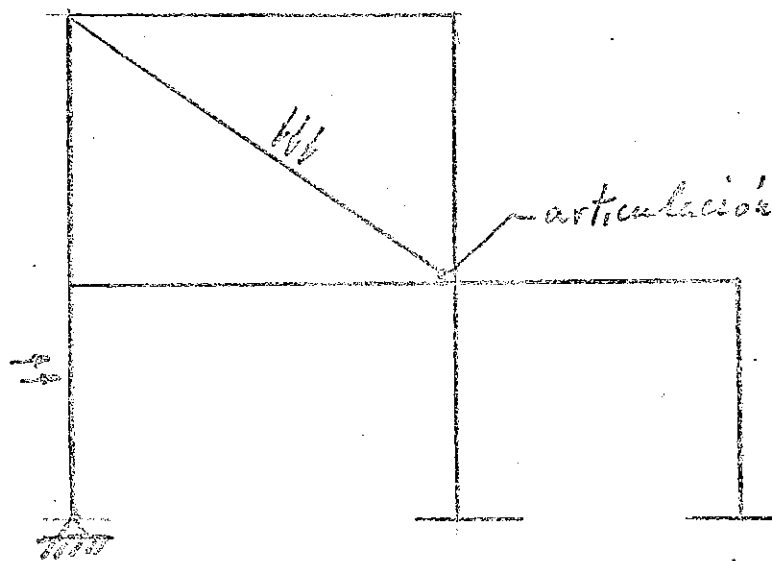
7) La suma de todos los momentos conduce a la obtención de la solución final como composición de la solución inicial y la modal. Los resultados finales de los momentos actuando sobre las distintas barras en sus extremos se deducen en la tabla 8.2.

Por último, las leyes de esfuerzos en todas las barras se calculan como se ha indicado en el capítulo 7 anterior y se representan en la figura 8.5.

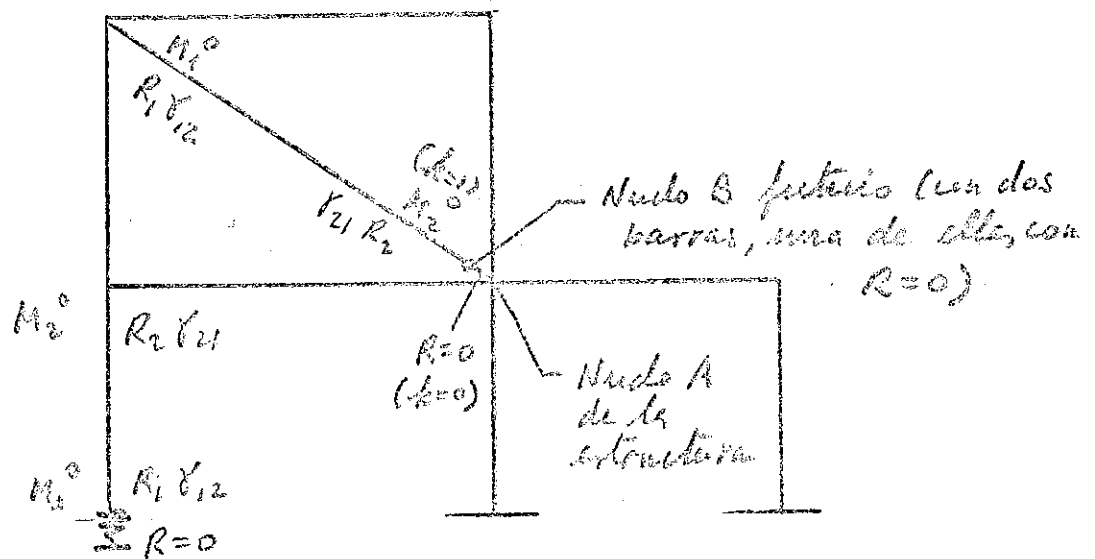
### 8.2.3. Simplificaciones en el método de Cross

El método de Cross que se acaba de describir permite el cálculo de estructuras intraslacionales de barras con nudos rígidos y articulados, bajo la actuación de cargas arbitrarias y condiciones de apoyo muy generales. Sin embargo, existen situaciones -barras en voladizos, nudos totalmente empotrados o articulados, simetría o antimetría de cargas, etc.- para las que es posible llevar a cabo simplificaciones en el cálculo, que se traducen generalmente en la reducción de una o varias columnas en el cuadro operativo representado en la tabla 8.2. A continuación se exponen algunas de estas situaciones, indicando a efectos comparativos el modo general de su tratamiento y la simplificación adecuada.

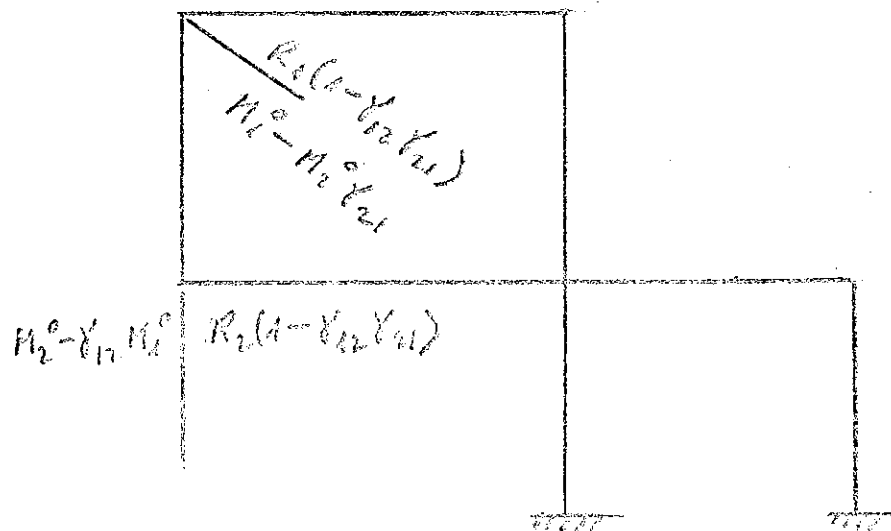
En el caso de barras articuladas en un extremo y elásticamente empotradas en el otro (figura 8.6a), es posible realizar el



(a) Estructura con barra con articulación



(b) Método general



(c) Método simplificado

Figura 8.6. Consideración de articulaciones en el método de Cross.

cálculo de Cross siguiendo el método general. Se supone la barra biempotrada en sus extremos y que en el extremo articulado está conectada a una barra de dimensión infinitesimal con rigidez nula (figura 8.6b). De este modo, los momentos que aparecen en el nudo A, coincidente con el extremo articulado de la barra, se reparten únicamente entre las barras empotradas al nudo y los propios de la barra con la articulación (procedentes de las cargas directamente aplicadas y de las transmisiones) se anulan, ya que su coeficiente de reparto es la unidad en el nudo ficticio B.

Existe un procedimiento alternativo más simple, que consiste en considerar el extremo empotrado de cada barra con articulación y las rigideces, así como los momentos de empotramiento rígido, correspondientes a ese tipo de barras (empotrada-apoyada), cuyas expresiones han sido deducidas en el capítulo anterior (figura 8.6c). Se puede, de esta forma, eliminar las columnas de la tabla que hacen referencia a los extremos articulados de las barras, con la consiguiente economía del esfuerzo de cálculo. Los esfuerzos finales se obtendrían en las barras con articulación como suma de los esfuerzos modales calculados en el Cross y de los iniciales correspondientes a la barra empotrada-articulada. El ejemplo 8.3 ilustra este procedimiento de análisis.

Una situación completamente opuesta a la anterior corresponde a nudos rígidamente empotrados. En estos casos, se puede suponer el empotramiento como una barra adicional de rigidez infinita, que conduce a unos coeficientes de reparto nulos para los extremos de las barras que concurren en el empotramiento. Este método general de cálculo puede simplificarse, eliminando las columnas de los extremos empotrados rígidamente, ya que estos extremos no transmiten momentos, al ser nulos sus coeficientes de reparto. El momento final que aparece en estos extremos suprimidos del análisis procede de las cargas directamente aplicadas en la barra (momentos de empotramiento rígido) más los debidos a las transmisiones del otro extremo. Así, se obtiene el siguiente valor del momento flector en el extremo  $i$  rígidamente empotrado de una barra que une el extremo  $i$  con el  $j$ :

$$M_i = M_i^0 + (M_j - M_j^0) \gamma_{ji} \quad (8.16)$$

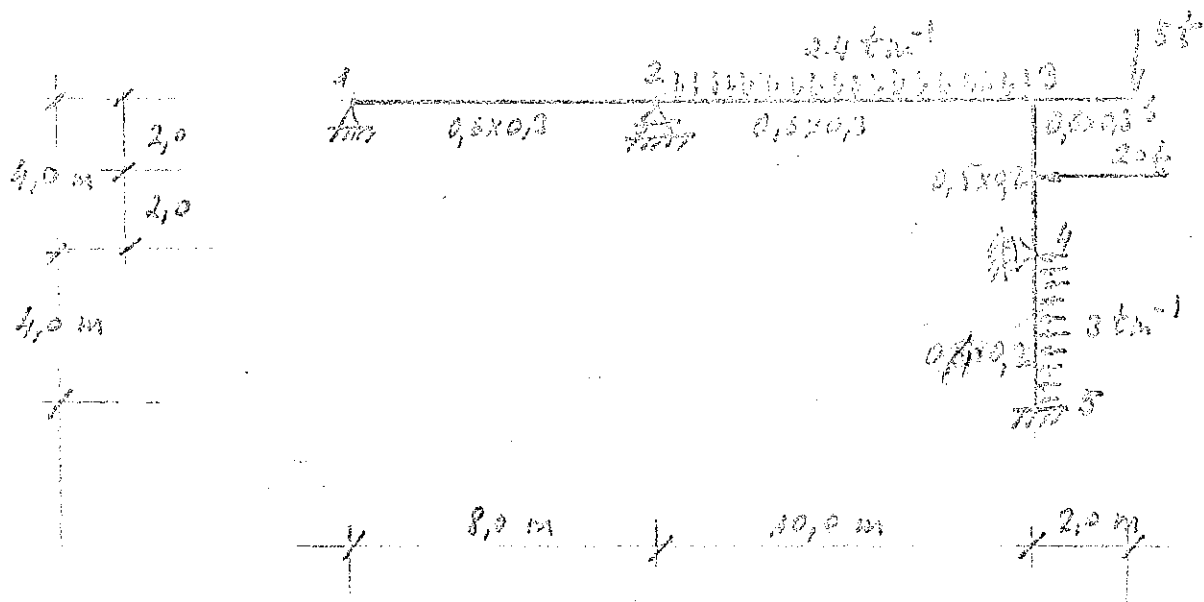
siendo  $M_i^0$  y  $M_j^0$  los momentos de empotramiento rígido de la barra bajo las cargas aplicadas directamente sobre ella y  $M_j$  el momento final (suma del inicial y modal) que aparece en el extremo opuesto  $j$  al rigidamente empotrado  $i$ .

Por último, puede suceder que existan barras con un extremo libre, es decir, voladizos. Si no se encuentran directamente cargadas estas barras, no inducen ninguna rigidez al giro y sus esfuerzos son nulos, por lo que pueden ser desconsideradas en un cálculo. Por el contrario, si existen cargas aplicadas sobre estos voladizos, en el método de Cross se introducen de un modo general como barras con rigidez y coeficientes de transmisión nulos y un momento de empotramiento perfecto igual al que ejerce el nudo sobre el voladizo. Se puede simplificar este procedimiento general, eliminando la barra voladizo y considerando como acción exterior sobre el nudo el momento producido por las cargas aplicadas en el voladizo (contrario al momento de empotramiento rígido anterior). El siguiente ejemplo compara ambas posibilidades de cálculo.

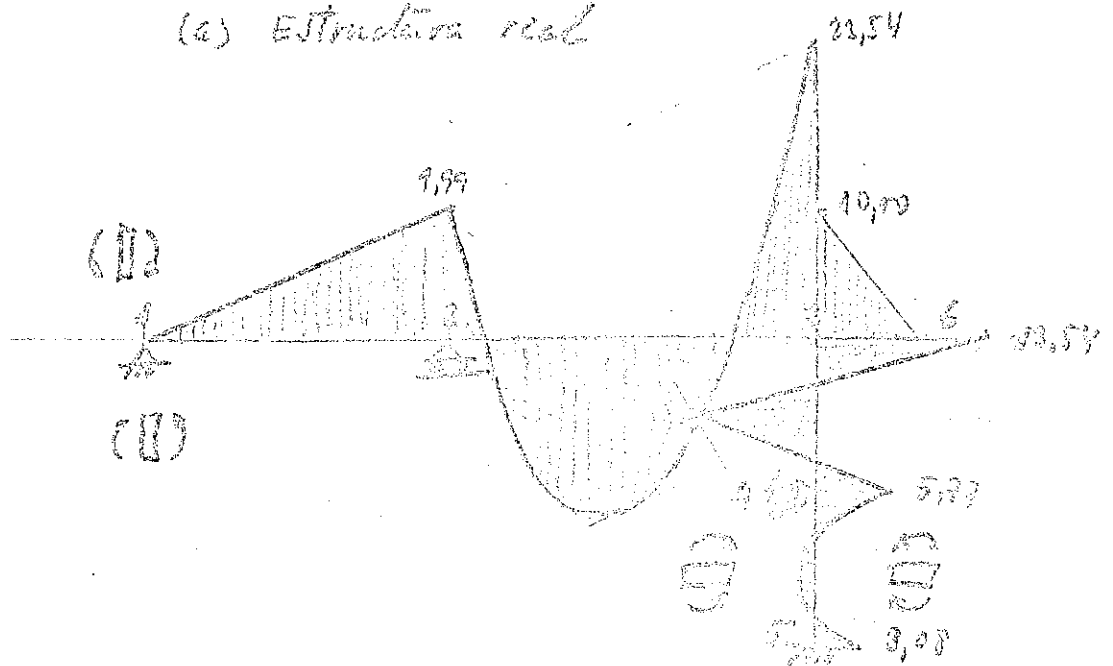
Ejemplo 8.3. Calcular la estructura pórtico de la figura 8.7. con las cargas y características que en ella se indican. El módulo de elasticidad del material es  $2 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}$  y en las dimensiones de las secciones la primera corresponde al canto de la viga. Aplicar ambos procedimientos de cálculo: general y simplificado.

El cálculo general de Cross, sin ninguna aproximación, se resume en la tabla 8.3. Como es usual, los superíndices 0 corresponden a los momentos de empotramiento rígido; los impares, a los de reparto, y los pares, a los de transmisión. Se han utilizado las siguientes idealizaciones.

En el nudo 1, cualquier momento aplicado lo absorbe la barra 1-2, por lo que puede suponerse que está unida a otra de rigidez nula en dicho nudo. El coeficiente de reparto es pues la unidad, ya que



(a) ESTRUCTURA real



(b) Ley de momentos flexores

Figura 8.7. Ejemplo 8.3.

$$k = \frac{R_1}{R_1 + 0} = 1$$

Por el contrario en el nudo 5, un momento aplicado es resistido totalmente por el empotramiento, por lo que la barra 5-6 - puede admitirse unida en el nudo 5, a otra de rigidez infinita. El coeficiente de reparto que resulta es nulo, puesto que

$$k = \frac{R_5}{R_5 + \infty} = 0$$

La rigidez del voladizo es nula y el momento de empotramiento rígido es 10 mt. (sentido positivo antihorario).

Los resultados del cálculo se obtienen en la misma tabla 8.3.

En el método simplificado no se considera el nudo 1 articulado, adoptándose como rigidez de la barra empotrada-articulada - 2-1, el siguiente valor

$$R = \frac{3EI}{L} = 4,05 \cdot 10^3 \text{ mt.}$$

y el momento de empotramiento rígido de esta barra es nulo, ya que - no existen cargas directamente aplicadas sobre ella; en otro caso, se debería considerar el correspondiente a la situación de empotrada-articulada.

En la barra 4-5, empotrada rígidamente en un extremo, no se incluye en la tabla la columna correspondiente al nudo 5, empotrado totalmente.

Por último, el voladizo 3-6 se elimina como barra en el cálculo, y se introduce como momento exterior al nudo 3, el valor -10 mt.

TABLA 8.3. Cálculo de Cross. Procedimiento general.

NUDO	1	2		3			4		5
BARRA	1-2	2-1	2-3	3-2	3-4	3-6	4-3	4-5	5-4
$R \cdot 10^3$	5,40	5,40	4,32	4,32	4,17	0	4,17	2,13	2,13
k	1	0,56	0,44	0,51	0,49	0,00	0,66	0,34	0
$\gamma$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0,5	0,5	0,5
$M^0$	0	0	20	-20	10	10	-10	4	-4
$M^1$	0	-11,20	-8,80	0,00	0,00	0	3,96	2,04	0
$M^2$	-5,60	0	0	-4,40	1,98	0	0	0	1,02
$M^3$	5,60	0	0	1,23	1,19	0	0	0	0
$M^4$	0	2,80	0,62	0	0	0	0,60	0	0
$M^5$	0	-1,92	-1,50	0	0	0	-0,40	-0,20	0
$M^6$	-0,96	0	0	-0,75	-0,20	0	0	0	-0,10
$M^7$	0,96	0	0	0,48	0,47	0	0	0	0
M	0	-10,32	10,32	-23,44	13,44	10,00	-5,84	5,84	-3,08



TABLA 8.4. Cálculo de Cross. Procedimiento simplificado.

NUDO	2		3 (M = -10)		4	
BARRA	2-1	2-3	3-2	3-4	4-3	4-5
$R \cdot 10^{-3}$	4,05	4,32	4,32	4,17	4,17	2,13
k	0,48	0,52	0,51	0,49	0,66	0,34
$\gamma$	-	0,5	0,5	0,5	0,5	-
$M^0$	0	20	-20	10	-10	4
$M^1$	-9,60	-10,40	0	0	3,96	2,04
$M^2$	0	0	-5,20	1,98	0	0
$M^3$	0	0	1,64	1,58	0	0
$M^4$	0	0,82	0	0	0,79	0
$M^5$	-0,39	-0,43	0	0	-0,52	-0,27
$M^6$	0	0	-0,22	-0,26	0	0
$M^7$	0	0	0,24	0,24	0	0
M	-9,99	9,99	-23,54	13,54	-5,77	5,77

El cálculo de Cross se efectúa del modo usual , teniendo en cuenta ahora que los momentos exteriores en los nudos se reparten únicamente una sola vez, de un modo semejante a los momentos de empotramiento rígido, pero sin modificar su signo.

Los resultados del cálculo se resumen en la tabla 8.4. Se observan ligeras discrepancias con los deducidos en la tabla, 8.3, pero conviene tener presente el carácter de aproximaciones -

sucesivas del método de Cross y el valor de los resultados depende del número de etapas de cálculo consideradas. Usualmente en el procedimiento simplificado se converge más rápidamente a los valores exactos que en el general.

Los momentos resultantes en los extremos no considerados en el cálculo se deducen simplemente como sigue:

-Extremo articulado  $M_{12} = 0$ .

-Extremo empotrado

$$M_{54} = (M_{45} - M_{45}^0) \gamma_{45} + M_{54}^0 = (5,77 - 4,00) 0,5 + (-4,00) = -3,12 \text{ mt.}$$

### 8.3. ESTRUCTURAS SIMETRICAS

#### 8.3.1. Introducción

Existen estructuras cuya geometría es simétrica respecto a un eje (figura 8.8). En este tipo de estructuras, denominadas simétricas es posible introducir simplificaciones importantes en el método de Cross, que supone la reducción del esfuerzo de cálculo del orden de un 50% aproximadamente. Como se consideran únicamente giros en los nudos, ya que los desplazamientos están impedidos en las estructuras intraslacionales, la simetría de la estructura prevalece en las situaciones con los apoyos, que coartan desplazamientos, dispuestos de un modo no simétrico. Incluso, en estructuras aparentemente no simétricas -como las que se muestran en la figura 8.9, bajo la denominación de cripto-simétricas- el método de Cross puede simplificarse de un modo drástico. En los siguientes apartados se exponen estas reducciones de cálculo, considerando primeramente la actuación de cargas simétricas, y, a continuación, la de acciones antisimétricas o antimétricas, para finalizar con el caso general de cargas arbitrarias.

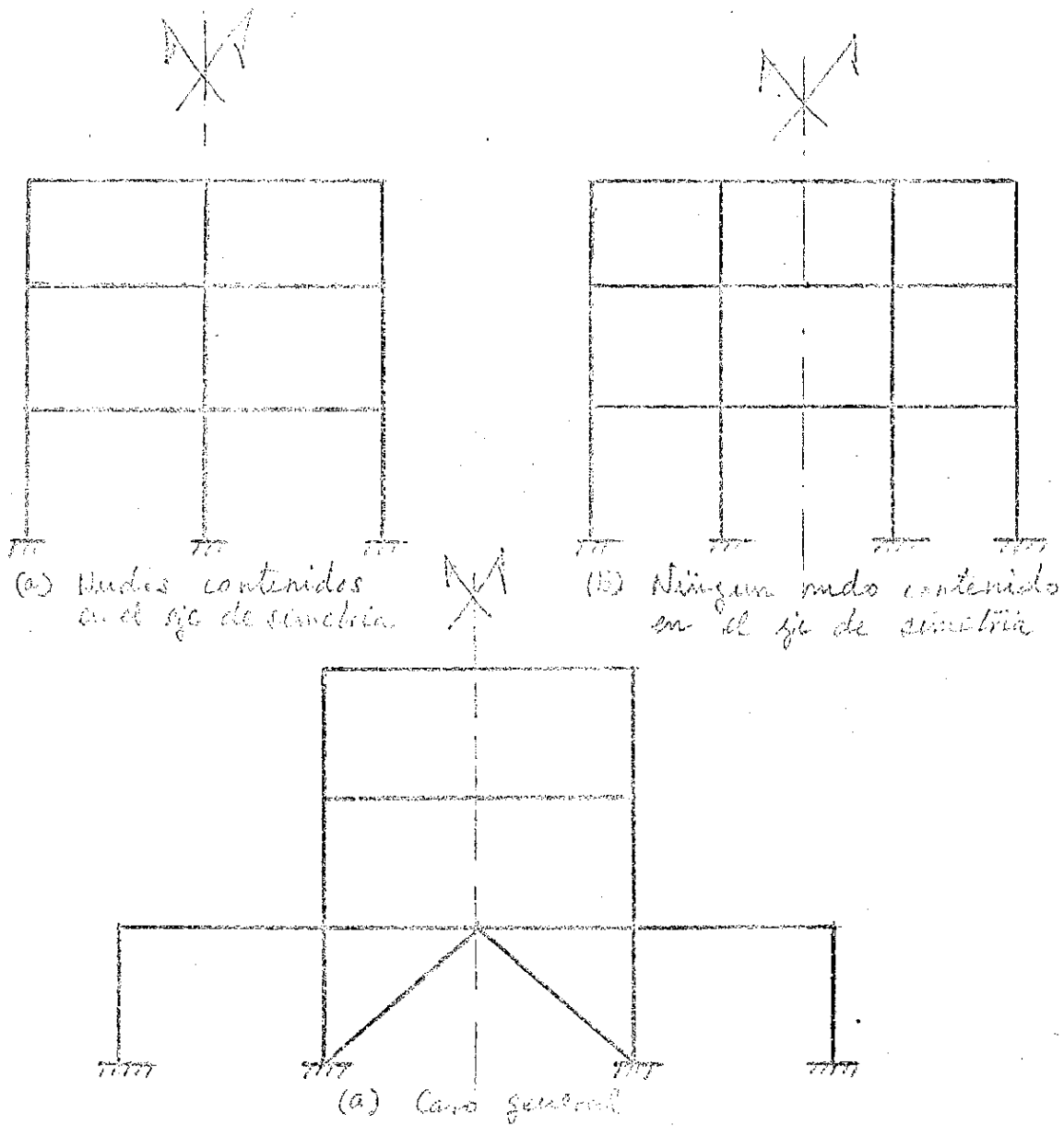


Figura 8.8. Estructuras simétricas.

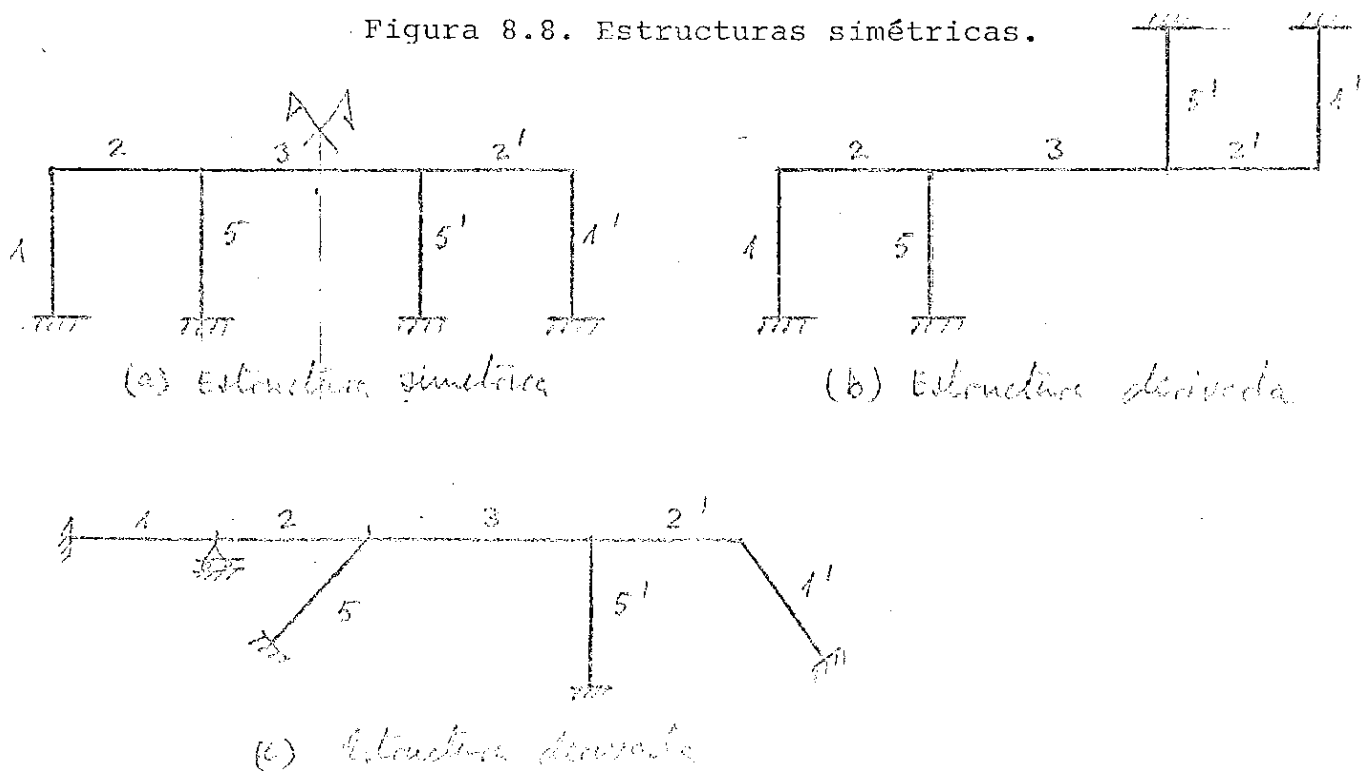


Figura 8.9. Estructuras criptosimétricas.

### 8.3.2. Cargas simétricas

Si las acciones -concentradas y repartidas- sobre una estructura simétrica están dispuestas simétricamente, es decir, actúan en secciones simétricas y de acuerdo con los sentidos y valores que se muestran en la figura 8.10, la estructura se dice que está sometida a cargas simétricas. En el caso general de estructuras criptosimétricas intraslacionales, es suficiente que las cargas sean tales que produzcan momentos de empotramiento rígido simétricos, es decir, si  $M_{ij}^0$  es el momento de empotramiento rígido sobre el extremo i de la barra ij, en la simétrica i'j' el momento de empotramiento en el extremo i debe ser  $-M_{ij}^0$ . Estrictamente, es preciso únicamente que el momento en desequilibrio sobre cada nudo n fuera opuesto al momento existente en el nudo simétrico n', para que sean válidas las siguientes simplificaciones de simetría de carga que se pueden aplicar en el método de Cross (\*) y que se describen a continuación.

Es conveniente distinguir dos casos de simetría:

Caso 1. El eje de simetría coincide con un soporte o, en general, nudos de la estructura están contenidos en él. (Figura - 8.8a).

En esta situación los nudos situados en el eje de simetría no giran y, como la estructura es intraslacional, significa que se encuentran empotrados rígidamente. Por lo tanto, es suficiente calcular una de las partes simétricas de la estructura con todos los nudos situados en el eje empotrados totalmente.

NOTA(\*): Se refiere, en este caso, a la posibilidad de simplificar en la solución modal, que corresponde esencialmente a la obtenida mediante el cálculo de Cross, debiéndose sumar la solución inicial, en general no simétrica.

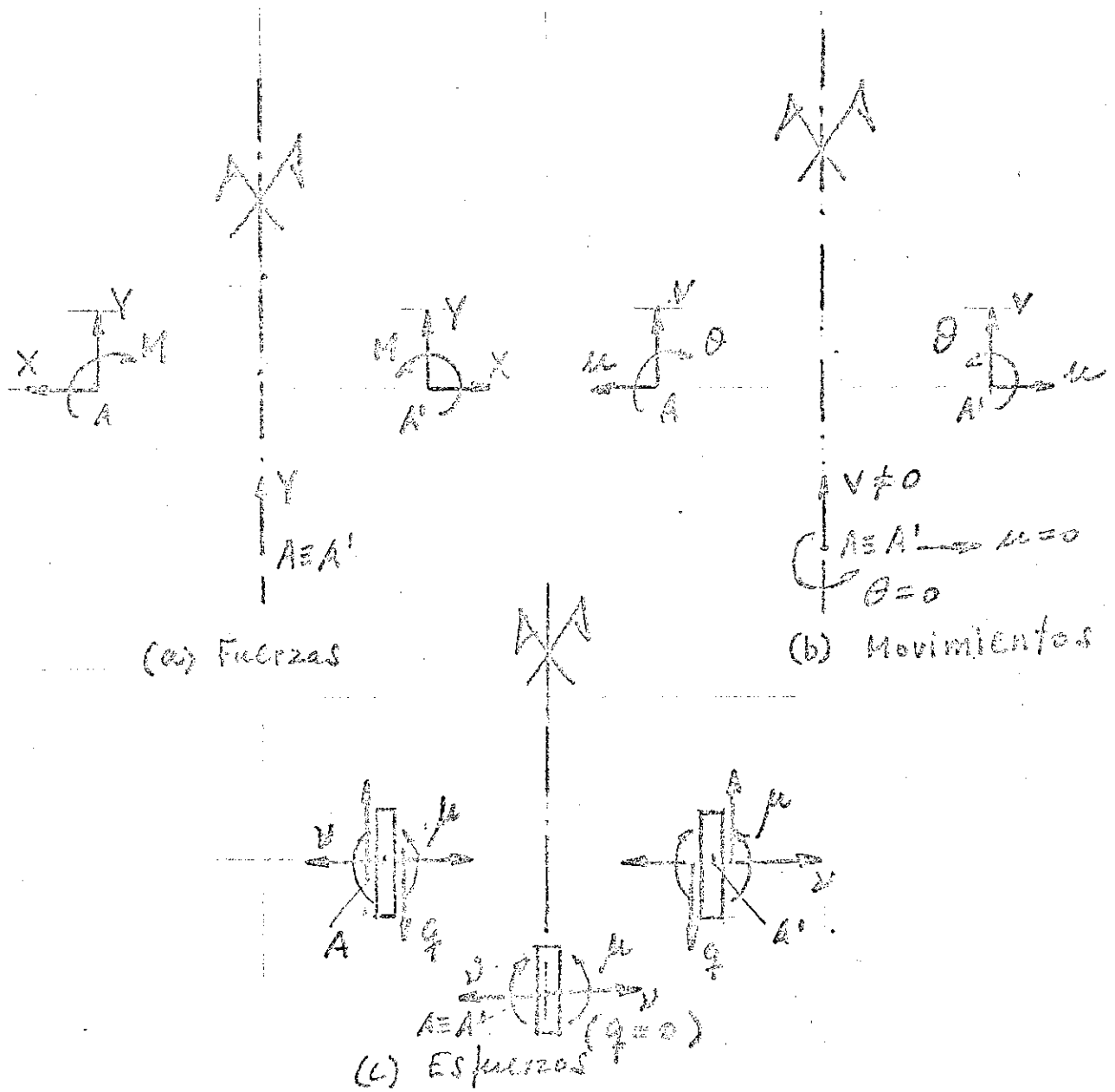


Figura 8.10. Simétricas de cargas.

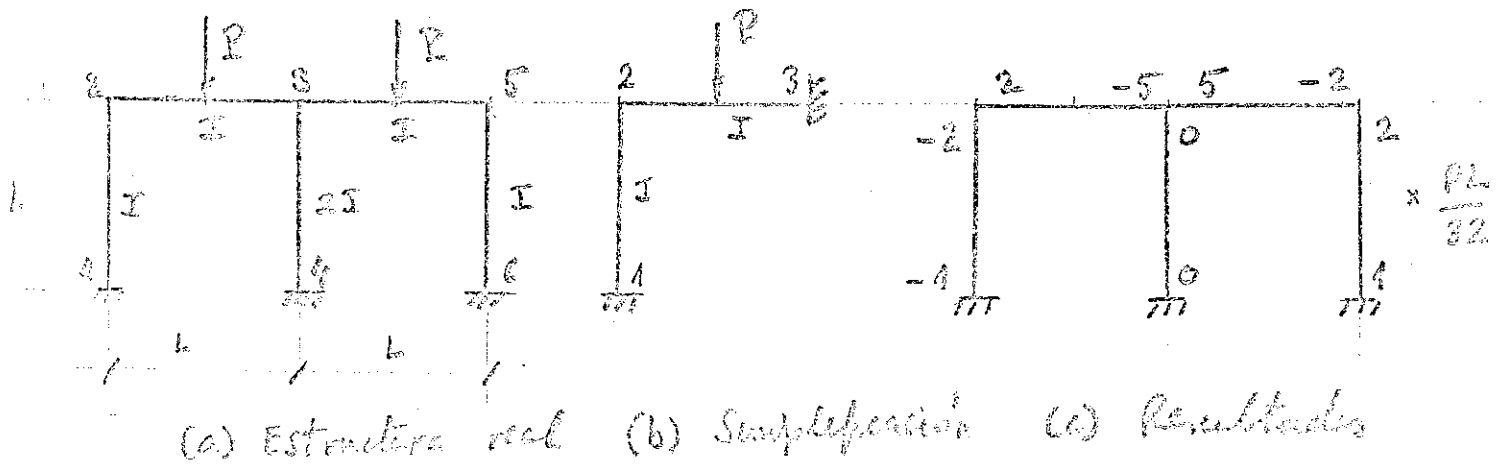


Figura 8.11. Ejemplo 8.4.

Los resultados de los esfuerzos en la parte simétrica - de la estructura que se ha suprimido en el análisis se deducen mediante las consideraciones de simetría que se indican en la figura 8.10c.

Ejemplo 8.4. Obtener los momentos en los extremos de las barras de la estructura pórtico de la estructura de la figura 8.11.

Se observa que la estructura es intraslacional, para las acciones consideradas, ya que por simetría no es posible la aparición de desplazamientos horizontales sin deformación axil del dintel 2-3-2', y los verticales están coaccionados por los soportes. Así, para este caso de carga simétrico, la estructura es intraslacional, no siendo precisa la disposición del apoyo en el nudo 2.

El cálculo se lleva a cabo sobre la estructura de la figura 8.11b, que corresponde a un solo nudo activo, cuyos resultados son directamente los procedentes del reparto, según se indica en la tabla 8.5.

TABLA 8.5. CALCULO DE CROSS

NUDO	2	
BARRA	2-1	2-3
R	$4EI/L$	$4EI/L$
k	0,5	0,5
$\gamma^0$	0,5	0,5
$M^0$	0	$PL/8$
$M^1$	$-PL/16$	$-PL/16$
FINAL M	$-PL/16$	$PL/16$

El momento en el nudo 3 de la barra,  $M_{32} = -\frac{5PL}{32}$ , y los resultados en toda la estructura se muestran en la figura 8.4c. El soporte central no recibe ningún momento flector (sólo trabaja a esfuerzo axil).

Conviene observar que la simetría de todos los esfuerzos sólo existe en los casos de estructuras simétricas bajo cargas y con coacciones simétricas. En el caso de que estas condiciones - no se satisfagan - estructuras criptosimétricas o bajo cargas no si métricas pero que producen momentos de empotramiento simétricos o que conducen a unos momentos de desequilibrio simétricos en el nudo, bien todos los esfuerzos no son simétricos, o únicamente los mo mentos flectores según el caso.

Caso 2. El eje de simetría de la estructura coincide con el eje de simetría de barras. (Figura 8.8b).

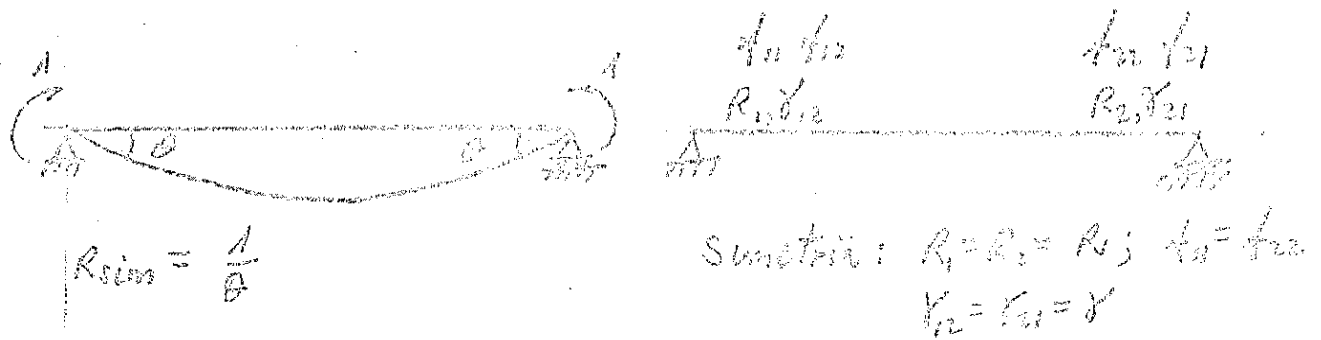
En este caso, no es posible suponer la sección (central) de la barra contenida en el eje de simetría de la estructura, empotrada, ya que si bien su giro está impedido, no así su desplazamiento vertical. Por ello, es conveniente definir la rigidez simétrica - de una barra simétrica, solicitada simétricamente, como la relación momento-giro que se indica en la figura 8.12. Se obtienen asimismo, en dicha figura, las expresiones de la rigidez simétrica,  $R_{sim}$ , en función de las flexibilidades  $f_{11} = f_{22}$  y  $f_{12} = f_{21}$  de la barra y en función de las rigideces,  $R_1 = R_2$ , y transmisión,  $\gamma_{12} = \gamma_{21}$ , es decir, las fórmulas siguientes:

$$R_{sim} = \frac{1}{f_{11} - f_{12}} \quad (8.17)$$

$$R_{sim} = R(1 - \gamma) \quad (8.18)$$

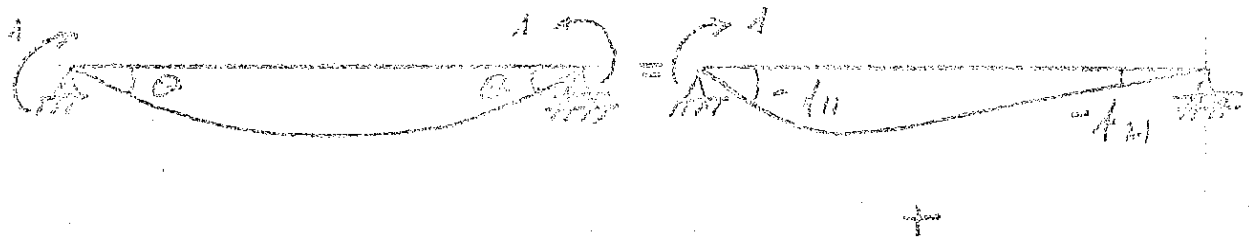
La rigidez simétrica de una barra puede calcularse directamente a partir de su definición. En efecto, usando la expresión de la viga conjugada, se deduce para la barra, cargada con una ley de momentos flectores constante e igual a la unidad en toda la luz, la expresión:

$$R_{sim} = \frac{1}{\frac{1}{2} \int_0^L \frac{dx}{EI}} = \frac{1}{\int_0^{L/2} \frac{dx}{EI}} \quad (8.19)$$

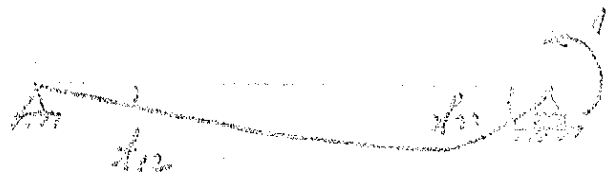


$$R_{sim} = \frac{1}{\theta}$$

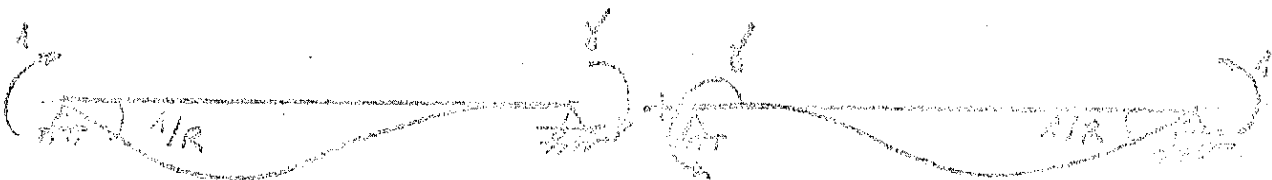
(a) Definición: rigidez simétrica (b) Características de la barra.



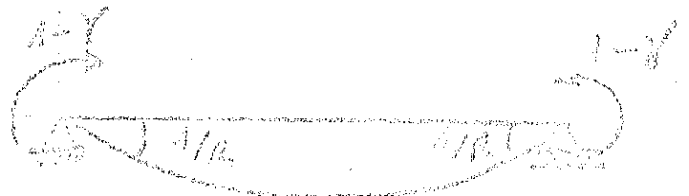
$$R_{sim} = \frac{1}{a_1 + a_2} = \frac{1}{a_1 + b_1}$$



(c) Rigidez simétrica en función de la flexibilidad de.



$$R_{sim} = R(1 - \gamma)$$



(d) Rigidez simétrica en función de las características de la barra.

Figura 8.12. Barra simétrica.



La integral (8.19) puede evaluarse según las técnicas - analíticas, geométricas o numéricas expuestas en el capítulo anterior.

Se puede mostrar que en el caso de barra simétrica se cumple la igualdad siguiente:

$$f_{11} - f_{12} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{dx}{EI} = \int_0^{L/2} \frac{dx}{EI}$$

que resulta de comparar las expresiones (8.17) y (8.18). Para ello se debe utilizar la condición de simetría de la viga

$$EI(x) = EI(L-x)$$

y, por consiguiente, se comprueba la igualdad:

$$\int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \frac{dx}{EI} + \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{dx}{EI} = \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{dx}{EI} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{dx}{EI}$$

ya que  $\int_0^L \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right) \frac{dx}{EI} = 0$  por simetría de la viga.

Ejemplo 8.5. Deducir la rigidez de la barra del ejemplo 7.3.

Se pueden aplicar cualquiera de las dos fórmulas (8.17) y (8.18), obteniéndose, de los resultados del ejemplo 7.3, los siguientes valores:

$$R_{sim} = \frac{1}{\frac{29}{144} \frac{L}{EI} + \frac{19}{144} \frac{L}{EI}} = \frac{144}{48} \frac{EI}{L} = 3 \frac{EI}{L}$$

$$R_{sim} = 8,7(1 - 0,655) \frac{EI}{L} = 3 \frac{EI}{L}$$

Las expresiones anteriores exigen el conocimiento previo de las características de la barra considerada como no simétrica. - Es posible utilizar directamente la definición de la barra simétrica y evaluar la integral (8.19) como se indica en la figura 8.13. Se llega así al resultado siguiente:

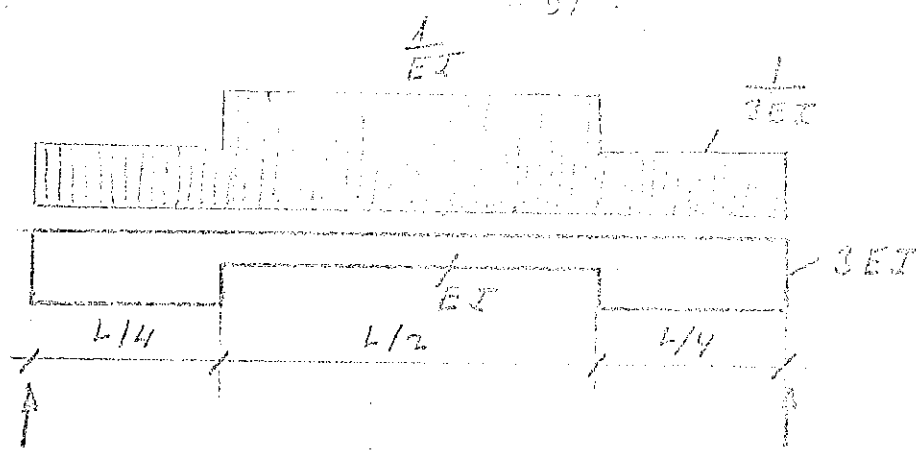
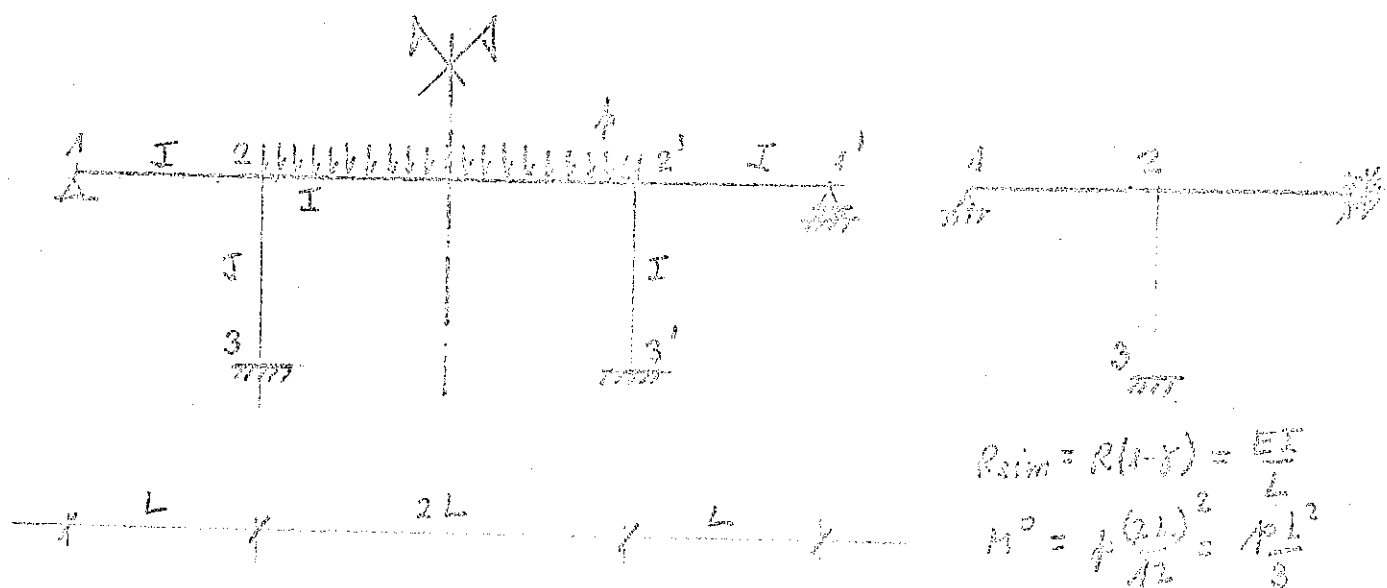
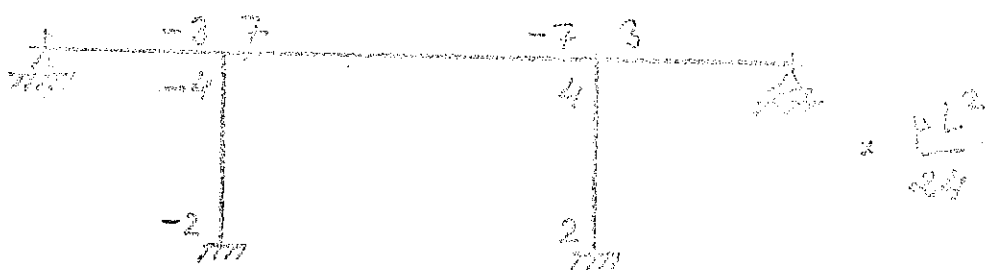


Figura 8.13. Cálculo de la rigidez simétrica. Ejemplo 8.5.



(a) Estructura real

(b) Simplificación



(c) Momentos finales en los extremos de barras.

Figura 8.14. Ejemplo 8.6.

$$R_{sim} = \frac{1}{\frac{1}{3EI} \frac{L}{4} + \frac{1}{EI} \frac{L}{4}} = \frac{3EI}{L}$$

De esta forma se puede suprimir una parte simétrica de la estructura y calcular la otra suponiendo que las barras que encuentran al eje de simetría poseen una rigidez simétrica ( $R_{sim}$ ). Las cargas directamente aplicadas sobre estas barras producen los momentos de empotramiento rígido calculados evidentemente para su luz total (real). El siguiente ejemplo ilustra esta simplificación.

Ejemplo 8.6. Calcular la estructura simétrica de la figura 8.14a, cuyas barras son de sección constante.

El cálculo se realiza de un modo simplificado sobre la estructura 8.14b, que sólo presenta un nudo activo, y los resultados de los momentos finales se deducen en la tabla 8.6 y se representan en la figura 8.14c.

TABLA 8.6. CALCULO DE CRÖSS

NUDO	2		
BARRA	2-1	2-3	2-21
R	$3EI/L$	$4EI/L$	$EI/L$
k	0,375	0,500	0,125
$\gamma$	0,5	0,5	0,5
$M^0$	0	0	$\frac{pL^2}{3}$
$M^1$	$\frac{pL^2}{8}$	$-\frac{pL^2}{6}$	$-\frac{pL^2}{24}$
FINAL M	$-\frac{1}{8} pL^2$	$-\frac{1}{6} pL^2$	$\frac{7}{24} pL^2$

### 8.3.3. Cargas antimétricas

Una estructura geoméricamente simétrica solicitada en -

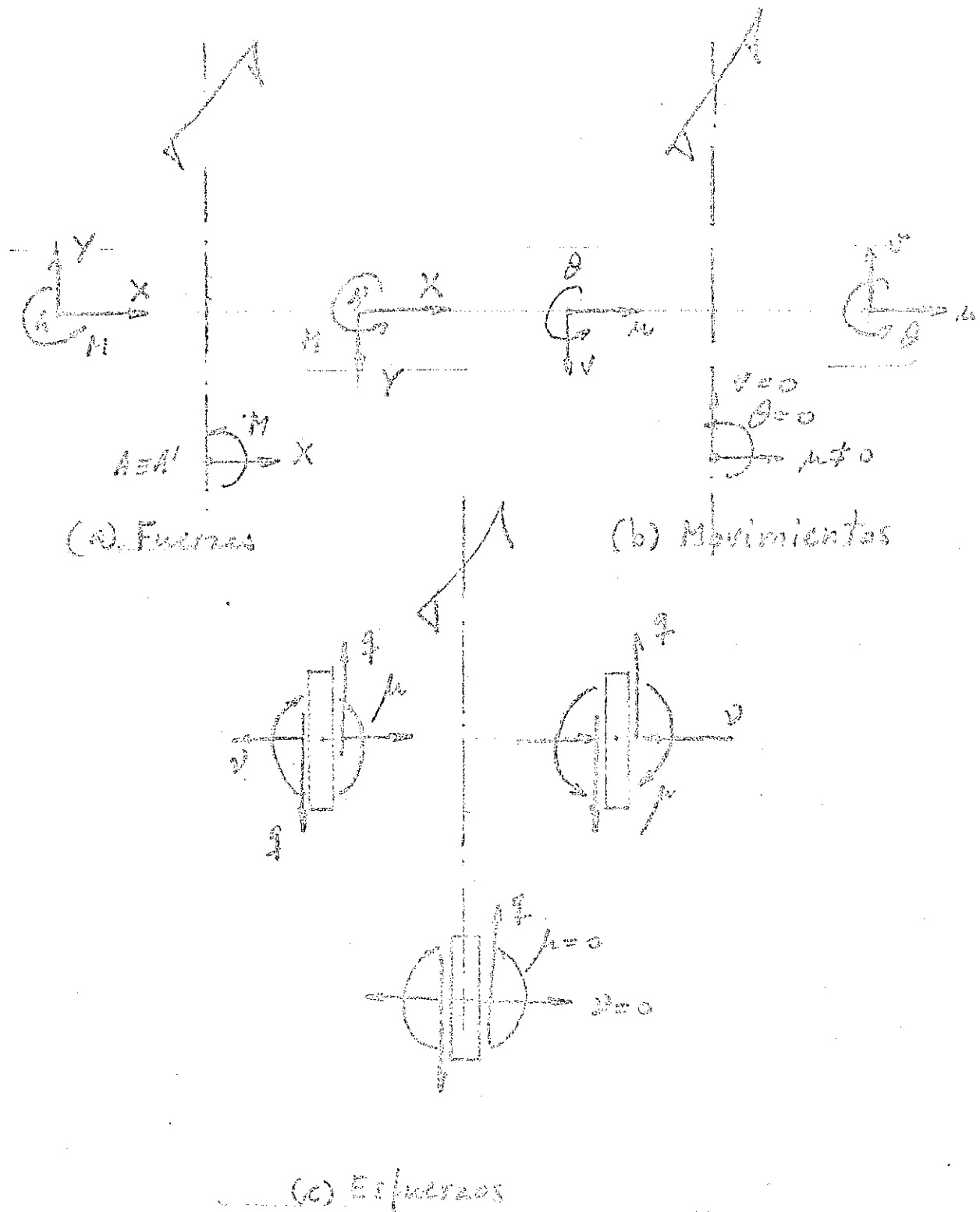


Figura 8.15. Cargas antimétricas

secciones simétricas con cargas de valores y sentidos antimétricos, es decir, como muestra la figura 8.15, se denomina estructura antimétrica. Estructuras aparentemente no simétricas con cargas antimétricas pueden calcularse en las simplificaciones que se exponen a continuación, incluso en las situaciones de cargas que producen únicamente momentos de empotramiento rígido iguales en barras simétricas, es decir, cuando  $M_{ij}^0 = M_{ij'}^0$ , con  $ij$  y  $ij'$  barras simétricas, o bien, cuando los momentos de desequilibrio en nudos simétricos son iguales entre sí.

Como en el caso de cargas simétricas, es conveniente distinguir dos casos.

Caso 1. El eje de simetría coincide con un soporte o, en general, nudos de la estructura están contenidos en él (figura 8.8a).

Como la estructura es intraslacional, los nudos situados en el eje no se desplazan y sólo giran, por lo que puede suponerse existe en ellos una articulación (figura 8.16a), o bien, si existe un soporte, puede dividirse la estructura en dos simétricas considerando la zona de soportes comunes con inercia mitad, lo que conduce a deformaciones compatibles a lo largo de los mismos (figura 8.16b).

El cálculo de la estructura se reduce a la consideración de la parte simétrica bajo las cargas correspondientes, de valor mitad cuando actúan en el eje de antimetría. Los esfuerzos resultantes se deducen de la consideración de la figura 8.15; en particular los resultados del Cross, momento  $M_{ij}$  en la barra  $ij$  coincide con el  $M_{ij}$  de la barra simétrica, a excepción de los soportes coincidentes con el eje de antimetría, cuyos esfuerzos se duplican. El siguiente ejemplo ilustra el cálculo.

Ejemplo 8.7. Calcular la estructura pórtico de la figura 8.17.

El cálculo se reduce al pórtico de la figura 8.17b, que, a su vez, dadas las condiciones de simetría, puede simplificarse a la estructura de un solo nudo representada en 8.17c. El cálculo de

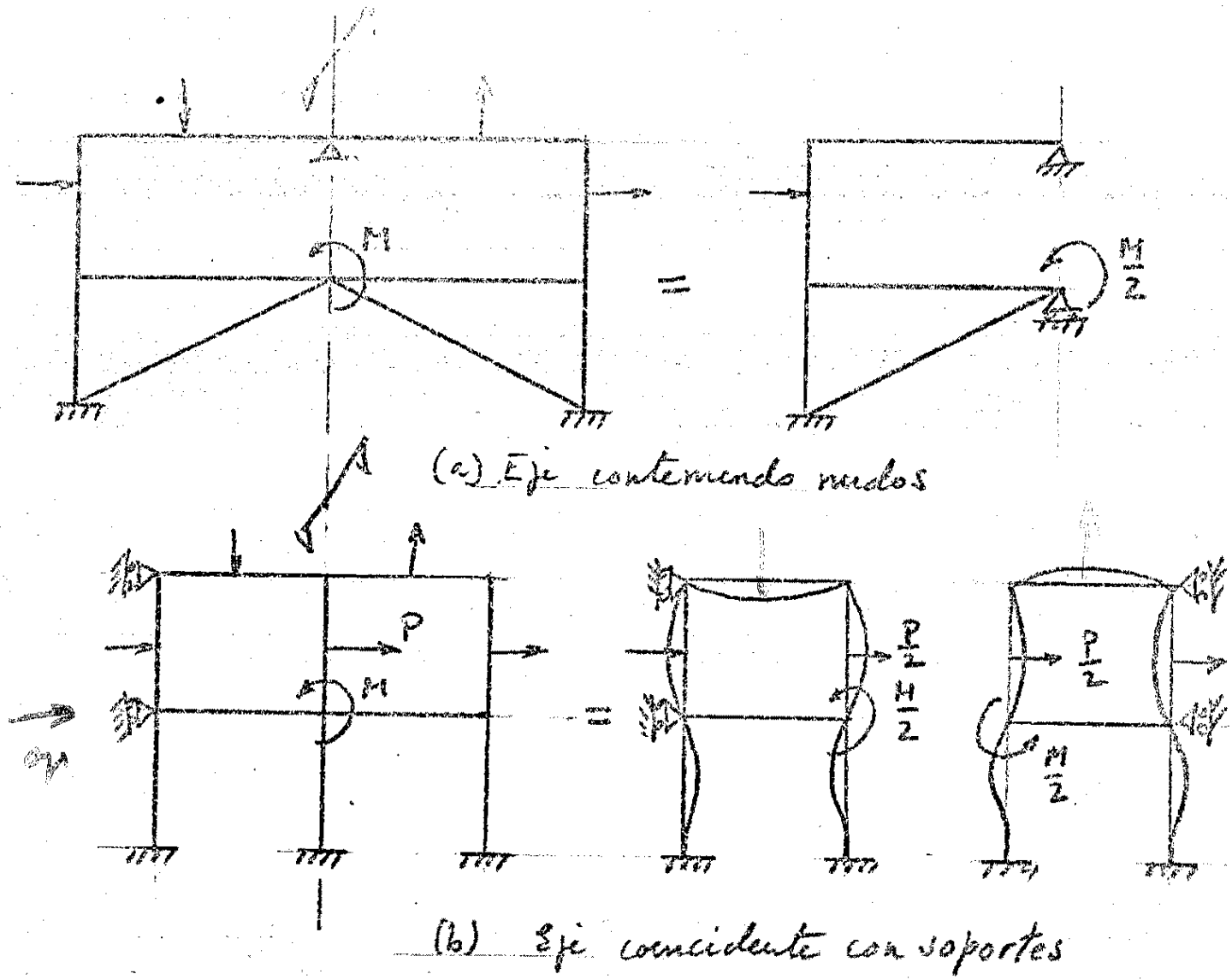


Figura 8.16. Estructuras antisimetricas.

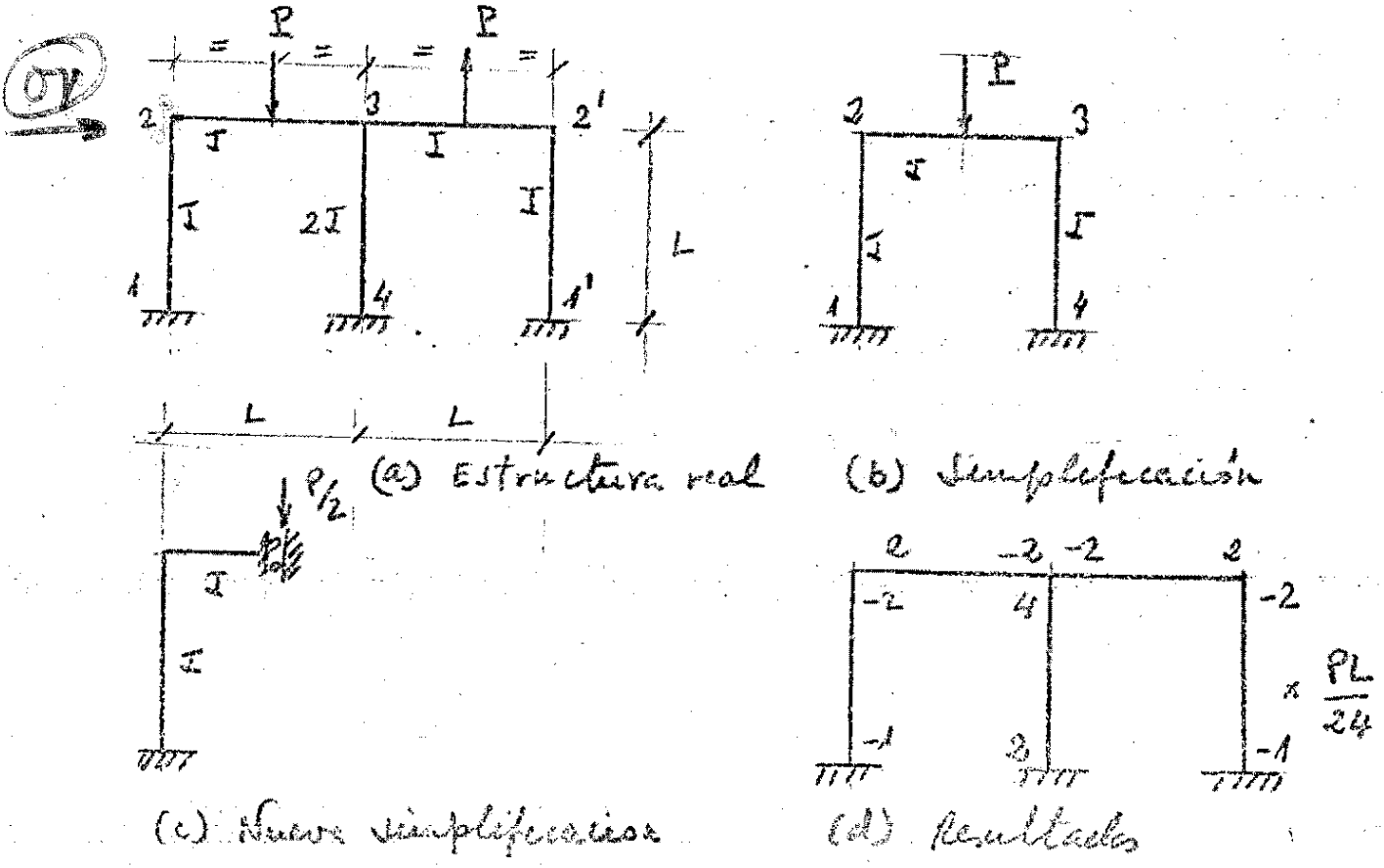


Figura 8.17. Ejemplo 8.7.

Cross se muestra en la tabla 8.7.

TABLA 8.7. Cálculo de Cross.

NUDO	2	
BARRA	2-1	2-3
R	$4EI/L$	$2EI/L$
k	$2/3$	$1/3$
$\gamma$	0,5	0,5
$M^0$	0	$-\frac{pL}{8}$
$M^1$	$-\frac{pL}{12}$	$-\frac{pL}{24}$
FINAL M	$-\frac{pL}{12}$	$\frac{pL}{12}$

Los resultados finales se resumen en la figura 8.17d, que corresponde a los momentos sobre barras aplicados en sus extremos, y se puede comprobar la antimetría existente en las leyes de esfuerzos momentos flectores, pero no así respecto a las leyes de esfuerzos axiales, que ven modificada su antimetría por la situación de la articulación, que debería cambiarse del nudo 2 a la situación simétrica en el nudo 3.

Caso 2. El eje de simetría de la estructura coincide con el eje de simetría de barras. (Figura 8.8b).

En este caso, se puede suponer la sección central de cada barra, que se encuentra situada en el eje de simetría de la estructura, articulada con desplazamiento impedido en la dirección del eje, como se desprende de la figura 8.15b. Por consiguiente, es posible estudiar la estructura mediante el cálculo de una parte simétrica de ésta, supuestas las barras cortadas por el eje de simetría, de luz mitad y articuladas en sus extremos (figura 8.20b). - Se consideran, en esta estructura parcial, únicamente las cargas directamente aplicadas sobre la misma (dividiendo por dos las que ac

túan en las secciones del eje de simetría).

Se debe tener en cuenta que si  $\bar{R}_1$ ,  $\bar{R}_2$  y  $\bar{\gamma}_{12}$ ,  $\bar{\gamma}_{21}$  son las rigideces y coeficientes de transmisión de la semiviga, los valores que deben de ser introducidos en el cálculo corresponden a la situación empotrada-apoyada, es decir, si se supone el nudo 2 situado en el eje de simetría, se obtienen los valores

$$R_{ant} = \bar{R}_1 (1 - \bar{\gamma}_{12} \bar{\gamma}_{21}) \quad (8.20)$$

A veces puede ser interesante deducir, de un modo análogo a como se ha considerado en la situación de cargas simétricas, la rigidez antimétrica de una barra.

Se supone la barra completa, de características  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $\gamma_{12}$  y  $\gamma_{21}$ , solicitada antimétricamente como se indica en la figura 8.18. La rigidez antimétrica,  $R_{ant}$ , se define en 8.18a, y su expresión en función de las características elastomecánicas -flexibilidades- de la viga completa es:

$$R_{ant} = \frac{1}{f_{11} + f_{12}} \quad (8.21)$$

y en términos de las rigideces y coeficientes de transmisión

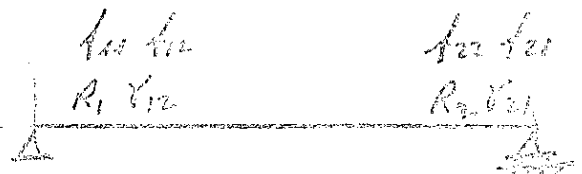
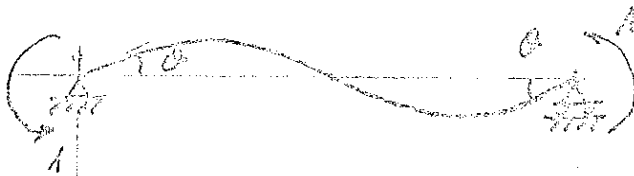
$$R_{ant} = R(1 + \gamma) \quad (8.22)$$

con  $R_1 = R_2 = R$  y  $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma$

En el caso particular de una viga de sección constante de luz  $L$ , la rigidez antimétrica es

$$R_{ant} = \frac{6EI}{L}$$





Simetría :  $R_1 = R_2 = R$   
 $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma$   
 $k_{11} = k_{22}$

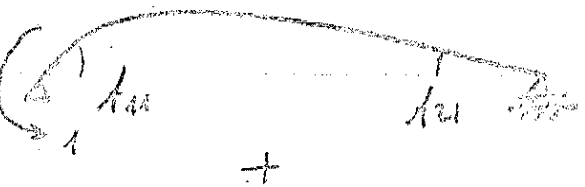


$R_{ant} = (\bar{k}_{11})^{-1}$   
 flexibilidad de la barra en el (1)

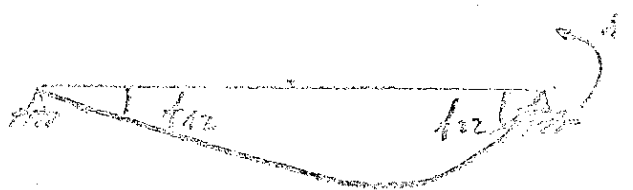
$\bar{k}_{11} \quad \bar{k}_{12} \quad \bar{k}_{21} \quad \bar{k}_{22}$   
 $\bar{k}_{11} \neq \bar{k}_{22}$  (en general)

(a) Definición de rigidez antisimétrica.

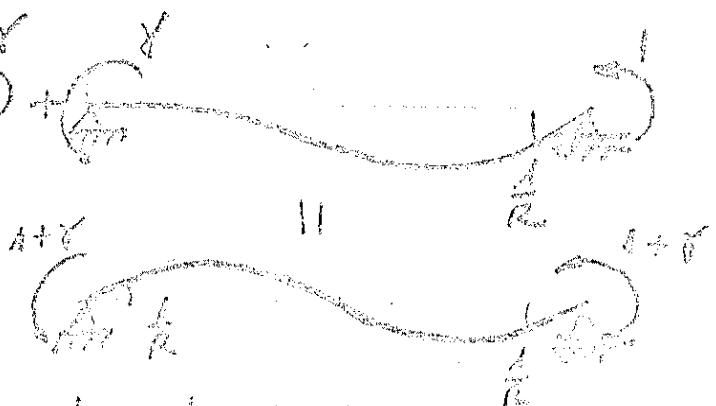
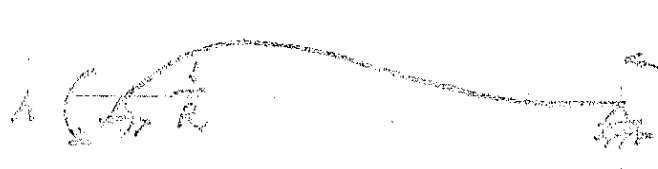
(b) Características de la barra.



$R_{ant} = \frac{1}{k_{11} + k_{12}} = \frac{1}{k_{22} + k_{21}}$



(c) Rigidez antisimétrica en función de las flexibilidades.



$R_{ant} = R(1 + \gamma)$

(d) Rigidez antisimétrica en función de las características.

Figura 8.18. Barra antisimétrica.

La rigidez antimétrica de una barra puede calcularse directamente a partir de su definición, obteniéndose

$$R_{ant} = \frac{1}{\int_0^L \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{dx}{EI}} \quad (8.23)$$

Esta integral coincide matemáticamente con el valor de la flexibilidad  $\bar{f}_n$  de la semiviga, es decir con la rigidez a flexión de esta semiviga supuesta empotrada en un extremo y articulado en el otro, coincidente este último con la sección central de la viga de luz total. En efecto, se tiene:

$$R_{ant} = \frac{1}{\bar{f}_{11}} = \frac{1}{\int_0^{L/2} \left(1 - \frac{2x}{L}\right)^2 \frac{dx}{EI}} \quad (8.24)$$

Las expresiones (8.23) y (8.24) son matemáticamente idénticas ya que se cumple la igualdad

$$\begin{aligned} \int_0^L \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{dx}{EI} &= \int_0^L \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \frac{dx}{EI} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \frac{dx}{EI} = \frac{1}{2} \int_0^L \left(1 - \frac{2x}{L}\right)^2 \frac{dx}{EI} = \int_0^{L/2} \left(1 - \frac{2x}{L}\right)^2 \frac{dx}{EI} \end{aligned}$$

puesto que por simetría de la viga, la siguiente integral es nula.

$$\int_0^L \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \frac{dx}{EI} = 0$$

Ejemplo 8.8. Calcular la rigidez antimétrica de la barra del ejemplo 7.3.

Se aplica cualquiera de las dos fórmulas (8.21) y (8.22); se deducen, a partir de los resultados obtenidos en el ejemplo 7.3, los valores siguientes:

$$R_{ant} = \frac{1}{\frac{29}{144} \frac{L}{EI} - \frac{19}{144} \frac{L}{EI}} = \frac{144}{10} \frac{EI}{L} = \frac{72}{5} \frac{EI}{L}$$

$$R_{\text{ant}} = 8,7(1 + 0,655) \frac{EI}{L} = 14,4 \frac{EI}{L}$$

Esta rigidez antimétrica puede calcularse directamente de la definición y es igual a la rigidez de la barra empotrada - apoyada que se representa en la figura 8.19. Se obtiene así:

$$\frac{1}{R_{\text{ant}}} = \frac{1}{3EI} \frac{L}{2} \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \frac{2}{3EI} \frac{L}{4} \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{L}{4} \frac{2}{L} = \frac{L}{EI} \left( \frac{1}{18} + \frac{1}{72} \right) = \frac{5}{72} \frac{L}{EI}$$

$$R_{\text{ant}} = \frac{72}{5} \frac{EI}{L}$$

Se comprueba la coincidencia de los resultados entre los distintos procedimientos.

Ejemplo 8.9. Calcular la estructura antimétrica de la figura 8.20a.

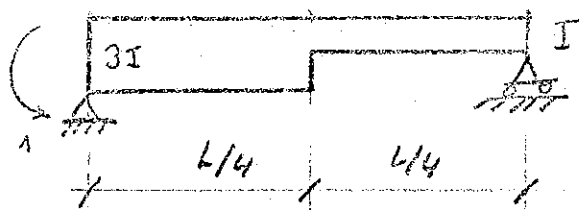
La estructura se simplifica en otra de un solo nudo activo, que se muestra en la figura 8.20b. Las rigideces de las barras son:

$$R_{12} = \frac{3EI}{L}, \quad R_{23} = \frac{4EI}{L} \quad \text{y} \quad R_{22', \text{ant}} = \frac{3EI}{L}$$

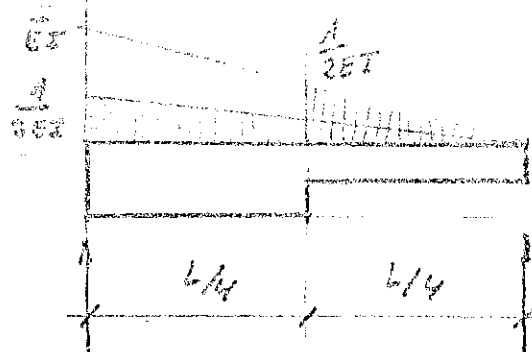
Los momentos de empotramiento rígido se pueden obtener en la barra total bajo las cargas antimétricas o bien en la empotrada-articulada de la estructura simplificada. En ambos casos se deducen idénticos resultados.

a) Viga total

$$M_{22'}^0 = P \left\{ \frac{\left(\frac{L}{2}\right) \left(\frac{3L}{2}\right)^2}{(2L)^2} - \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2 \left(\frac{3L}{2}\right)}{(2L)^2} \right\} = \frac{3}{16} PL$$

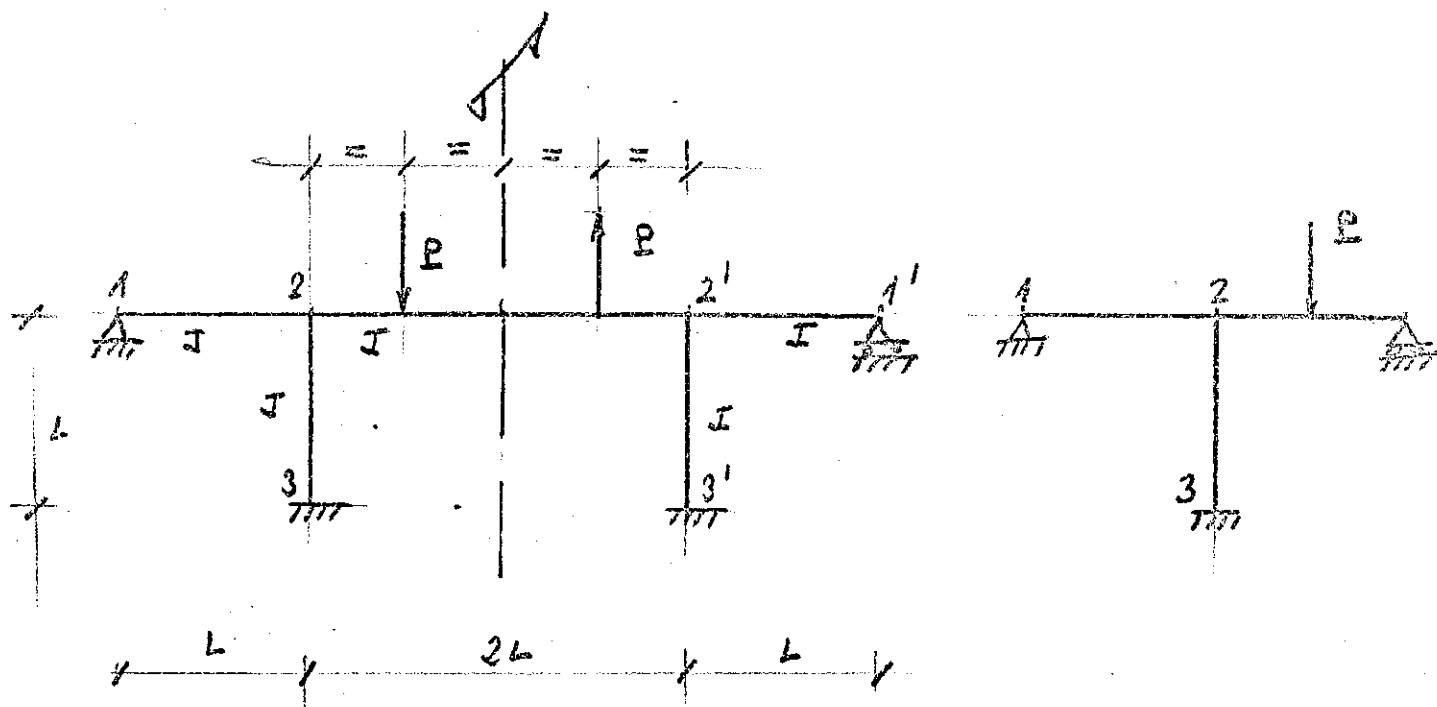


(a) Viga real



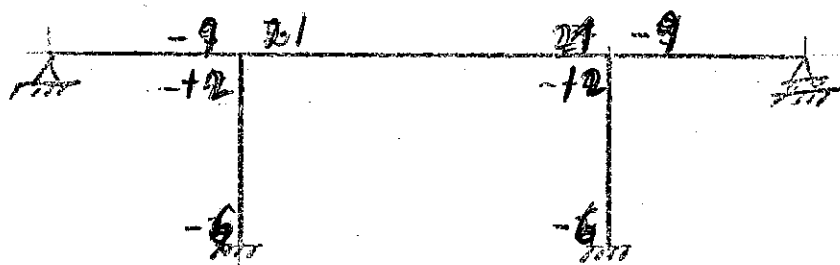
(b) Viga conjugada

Figura 8.19. Cálculo de la rigidez antimétrica. Ejemplo 8.8.



(a) Estructura real

(b) Simplificación



$$\times \frac{PL}{160}$$

(b) Momentos finales en los extremos de barras

Figura 8.20 Figura 8.9.

b) Viga empotrada-apoyada.

$$M_{22}^0 = \frac{PL}{8}(1 + 0,5) = \frac{3PL}{16}$$

El cálculo de Cross se resume en la tabla 8.8.

TABLA 8.8. Cálculo de Cross

NUDO	2		
BARRA	2-1	2-3	2-21
R	$\frac{3EI}{L}$	$\frac{4EI}{L}$	$\frac{3EI}{L}$
k	0,3	0,4	0,3
γ	0,5	0,5	0,5
M <sup>0</sup>	0	0	$\frac{3PL}{16}$
M <sup>1</sup>	$-0,9 \frac{PL}{16}$	$-1,2 \frac{PL}{16}$	$-0,9 \frac{PL}{16}$
FINAL M	$-\frac{9}{160} PL$	$-\frac{12}{160} PL$	$\frac{21}{160} PL$

Los resultados se muestran en la figura 8.20c. Es conveniente tener presente que la ley de axiles no sería en este caso antimétrica, ya que el apoyo que impide el movimiento horizontal del dintel no está situado simétricamente (en la sección central) supuesto que se ha dispuesto en el nudo 1.

#### 8.3.4. Cargas arbitrarias

El cálculo de una estructura simétrica sometida a cargas arbitrarias puede llevarse a cabo como suma de dos estados de cargas; simétrico y antisimétrico, para cada uno de los cuales se puede proceder a las simplificaciones comentadas en los anteriores apartados.

La figura 8.21. ilustra esta descomposición de las cargas que se basa en la siguiente identidad, válida para una carga (momento o fuerza)  $V_A$ , de valor  $V$  aplicada en el punto  $A$  cuyo simétrico es  $A'$ :

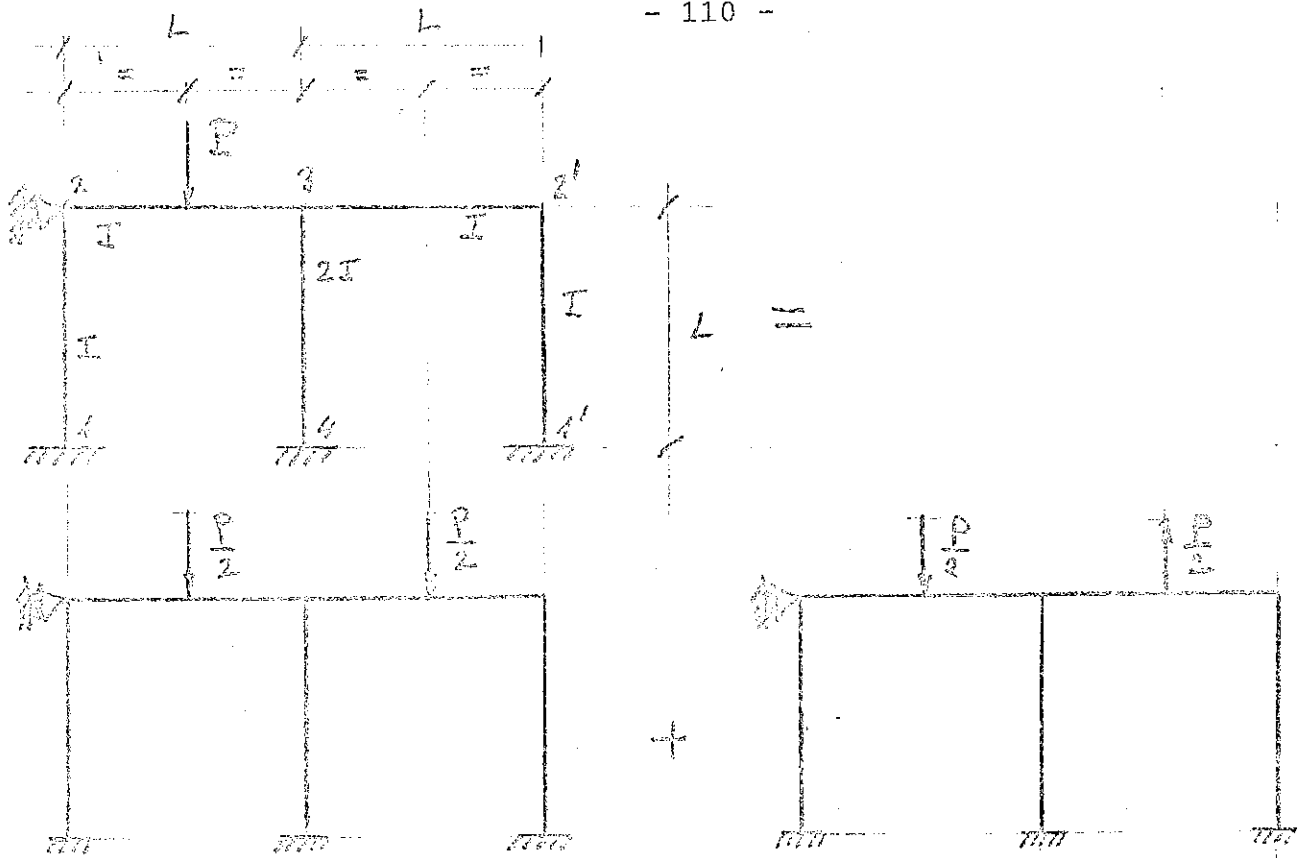
$$V_A = \left( \frac{V_A}{2} + \frac{V_{A'}}{2} \right) + \left( \frac{V_A}{2} - \frac{V_{A'}}{2} \right)$$

La descomposición anterior puede a veces efectuarse a nivel de momentos de empotramiento rígido, en lugar de cargas actuantes, y obtener así una cierta economía en el esfuerzo de cálculo.

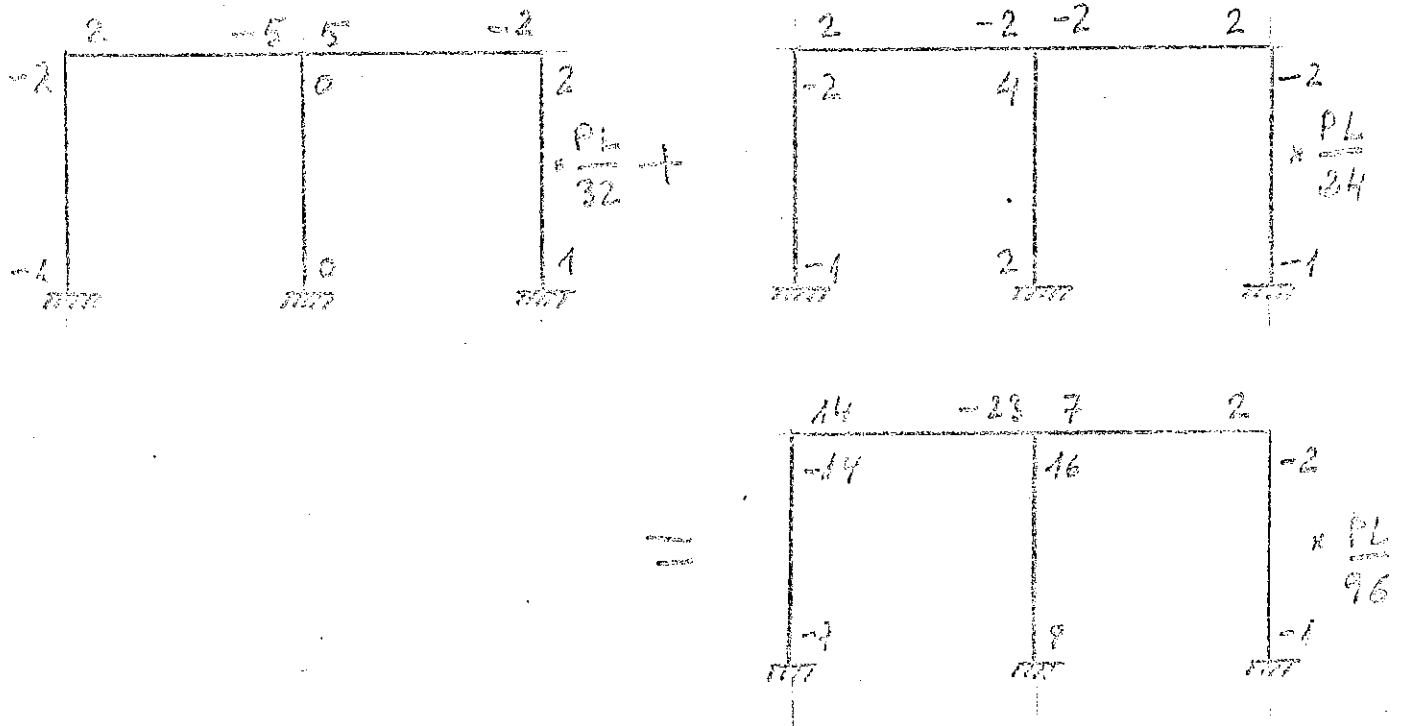
En general, esta descomposición del cálculo de una estructura simétrica de  $N$  nudos en otras dos, simétrica y antimétrica, de nudos aproximadamente mitad, es ventajosa desde el punto de vista computacional en aquellos casos en los que las estructuras simplificadas presentan un número pequeño de nudos (uno o dos). En caso contrario, el esfuerzo de cálculo de las distintas características de las barras, momentos de empotramiento, y la suma final de resultados disminuye las ventajas de la reducción de la estructura. Sin embargo, como se verá más adelante, al tratar de cálculo mediante computador, suele ser más económico (particularmente para valores grandes de  $N$ ) el análisis de las dos estructuras parciales, simétrica y antimétrica, que el de la estructura global; aparte del hecho de que a veces la capacidad del computador existente no permite el tratamiento de un número elevado de nudos.

#### 8.4. DETERMINACION DE MOVIMIENTOS

El conocimiento del comportamiento o respuesta de una estructura no consiste únicamente en la determinación de los esfuerzos en las distintas secciones de la misma sino que puede incluir la obtención de los movimientos de todos sus puntos o su deformada general.



(a) Estructura



(b) Resultados

Figura 8.21. Descomposición de una carga general en dos estados simétrico y antisimétrico.

El procedimiento de cálculo de estos movimientos a partir de los resultados del Cross se indica a continuación, comenzando por el caso más simple de una estructura de un solo nudo activo (figura 8.3). Se obtuvo en el apartado 8.2.1. el ángulo de giro de cada barra igual al giro del nudo, como la relación entre el momento y rigidez correspondiente, es decir,

$$\theta_0 = \frac{M_{0i}}{R_{0i}} = \frac{\sum_{i=1}^n M_{0i}}{\sum_{i=1}^n R_{0i}} = \frac{M}{\sum_{i=1}^n R_{0i}}$$

Por consiguiente el giro del nudo de la estructura simple compuesta de  $n$  barras concurrentes en él, bajo la acción de un momento exterior  $M$ , es simplemente el valor de dicho momento dividido por la suma de las rigideces a flexión en el nudo de todas las barras concurrentes. Evidentemente, si se conoce el momento de reparto en una barra  $i$ ,  $M_{0i}$ , este giro es igual a la relación entre este momento de reparto y la rigidez correspondiente en el extremo de la barra.

La anterior propiedad puede ser extendida al caso general de una estructura reticulada plana de varios nudos. El giro en un nudo procede únicamente de la operación de reparto de los sucesivos momentos en desequilibrio -la solución inicial y los diferentes momentos de transmisión no suponen ningún giro adicional- y, por lo tanto, basta dividir la suma de esta sucesión de momentos de desequilibrio en un nudo por la suma de rigideces en el nudo de las barras que en él concurren. Frecuentemente es más cómodo obtener el giro del extremo de una barra determinada, que coincida con el nudo en estudio, ya que, si se ha llevado a cabo el cálculo de Cross, la suma de los momentos de reparto o momento total de reparto se obtiene simplemente considerando los momentos de superíndice impar en el extremo de la barra. Así, se deduce el giro  $\theta_n$ , en el nudo  $n$ , mediante la expresión siguiente:



$$\theta_n = \frac{M_{nm}}{R_{nm}} = \frac{M_{nm}^1 + M_{nm}^3 + M_{nm}^5 + \dots}{R_{nm}} \quad (8.25)$$

con  $M_{nm}^i$  ( $i = 1, 3, 5, 7, \dots$ )

los sucesivos momentos de reparto y  $R_{nm}$  la rigidez a flexión en el nudo n de la barra nm. (\*)

La fórmula (8.25) coincide con la (8.14) obtenida previamente en la deducción del método de Cross.

El procedimiento de determinación de giro en nudos que se acaba de describir es útil cuando se conoce la tabla operativa de Cross; sin embargo pueden existir situaciones en donde sólo los momentos finales son datos y no los valores de los momentos - auxiliares del cálculo de empotramiento, reparto y transmisión. - En este caso, se plantea para la barra mn, o, en numeración local, 12, las siguientes ecuaciones constitutivas de la misma:

$$\begin{aligned} M_1 &= M_1^0 + R_1 \theta_1 + R_2 \gamma_{21} \theta_2 \\ M_2 &= M_2^0 + R_2 \theta_2 + R_1 \gamma_{12} \theta_1 \end{aligned} \quad (8.26)$$

siendo  $M_1$  y  $M_2$  los momentos finales de Cross en los extremos de la barra y  $M_1^0$  y  $M_2^0$  los debidos a la solución inicial (momentos de empotramiento rígido producidos por las cargas directamente aplicadas en la barra). Los valores de los giros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  que aparecen en los extremos de las barras se determinan mediante la resolución del sistema (8.26), y, por consiguiente, son:

NOTA(\*): Evidentemente la barra mn no puede estar articulada en el nudo n pues su giro no afecta para nada al resto de las barras en él concurrentes. La fórmula (8.25) conduciría a un resultado indeterminado.

$$\theta_1 = \frac{(M_1 - M_1^0) - \gamma_{21}(M_2 - M_2^0)}{R_1(1 - \gamma_{12} \gamma_{21})}$$

$$\theta_2 = \frac{(M_2 - M_2^0) - \gamma_{12}(M_1 - M_1^0)}{R_2(1 - \gamma_{21} \gamma_{12})}$$
(8.27)

Una expresión alternativa a la (8.27) se presenta a continuación introduciendo las flexibilidades  $f_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) de la barra:

$$\theta_1 = f_{11}(M_1 - M_1^0) + f_{12}(M_2 - M_2^0)$$

$$\theta_2 = f_{21}(M_1 - M_1^0) + f_{22}(M_2 - M_2^0)$$
(8.28)

Conviene observar que los momentos  $M_1 - M_1^0$  y  $M_2 - M_2^0$  corresponden a los de la solución modal.

La deformada de una viga se puede calcular como suma de la deformada inicial -producida por las cargas directamente aplicadas sobre la viga supuesta biempotrada- y de la deformada modal generada por los giros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en sus extremos (\*), o bien, como actuación de los momentos  $M_1 - M_1^0$  y  $M_2 - M_2^0$ , correspondientes a la solución modal.

En el caso de un voladizo, la deformada producida por el voladizo bajo las cargas directas debe ser sumada a la debida al giro del arranque como nudo de la estructura.

NOTA(\*): Esta deformada corresponde, como es bien sabido, para una viga de sección constante, a la siguiente ecuación:

$$v(x) = x(1 - \frac{2x}{L} + \frac{x^2}{L^2})\theta_1 + x(\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L})\theta_2$$

Ejemplo 8.10. En la estructura de la figura 8.22, la sección del dintel es rectangular de 0,40 m. de canto y 0,30 m. de ancho. Los pilares son de sección cuadrada de 0,30 m. de lado. Las -cargas actuantes se indican en la figura y no se considera el peso propio. El módulo de elasticidad es de  $2 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}$ .

Se pide:

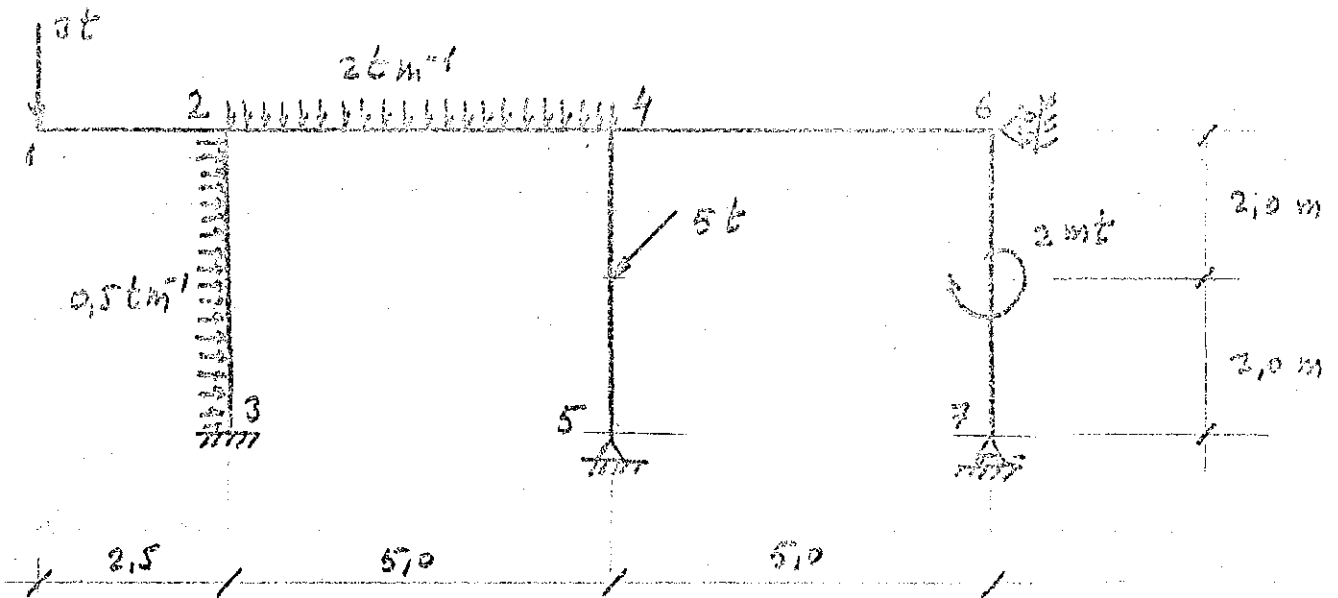
- a) Momentos flectores en los extremos de barras.
- b) Leyes de axiles a lo largo de la barra 4-5.
- c) Giro del nudo 4.

La estructura es intraslacional y la barra 6-7 es, a los efectos de cálculo, como un voladizo que impide, por otra parte, el descenso vertical del nudo 6. El momento de 2 mt. se transmite - del nudo 6 al 4, deduciéndose el valor de 1 mt. Los restantes momentos de empotramiento rígido son inmediatos. La tabla 8.9 resume el cálculo de Cross. Los resultados se exponen en las figuras 8.22c y 8.22d. El giro en el nudo 4 se deduce mediante la fórmula (8.25), obteniéndose:

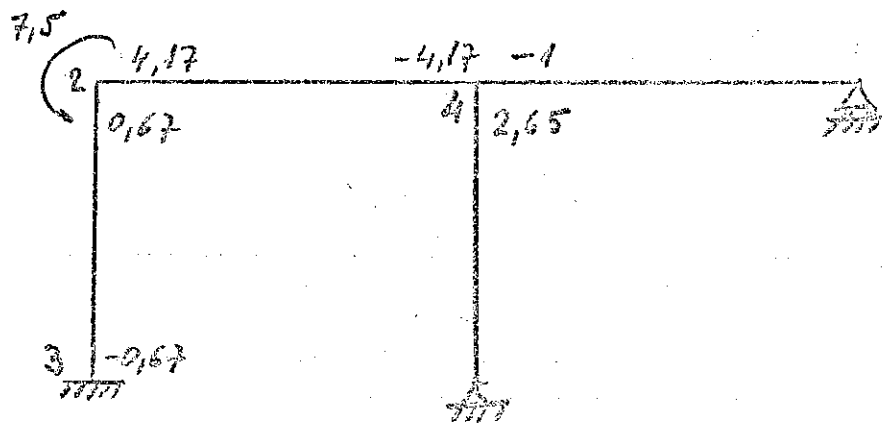
$$\theta_4 = \theta_{42} = \frac{M^1 + M^3}{R_{42}} = \frac{1,18 - 0,61}{2560} = 0,23 \cdot 10^{-3} \text{ radianes (positivo)}$$

La expresión alternativa (8.28) conduce a un valor análogo, como se comprueba a continuación:

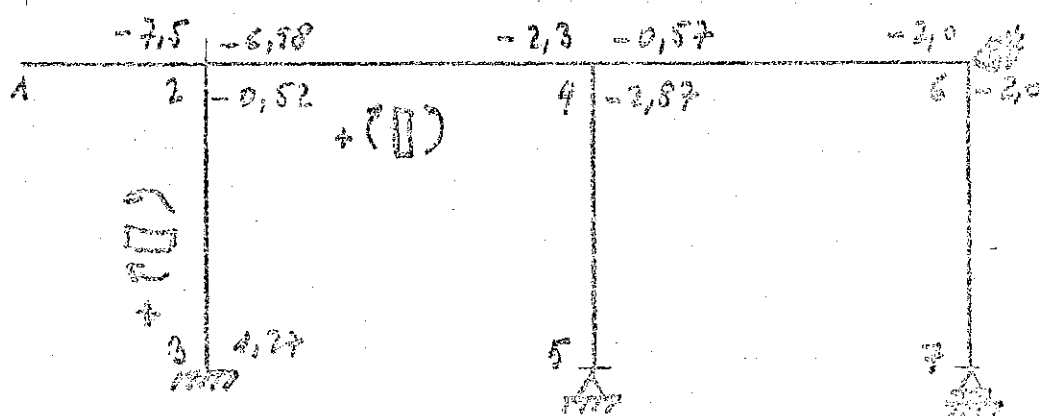
$$\begin{aligned} \theta_4 = \theta_{42} &= (-2,30 + 4,17) \frac{5.0}{3EI} - (6,98 - 4,17) \frac{5.0}{6EI} = \\ &= \frac{0,755}{EI} \end{aligned}$$



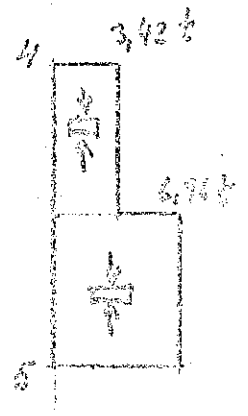
(a) Estructura real



(b) Estructura simplificada y solución inicial



(c) Momentos flectores



(d) Ley de acción  
(barra 4-5).

Figura 8.22. Ejemplo 8.10.

$$\theta_4 = \frac{0,775}{2 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,4^3 \cdot 0,3}{12}} = 0,24 \cdot 10^{-3} \text{ radianes}$$

TABLA 8.9. Cálculo de Cross

NUDO	2 (M = 7,5)		4		
BARRA	2-3	2-4	4-2	4-5	4-6
R	1344	2560	2560	1008	1920
k	0,35	0,65	0,47	0,18	0,35
$\gamma$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
$M^0$	-0,67	4,17	-4,17	2,65	-1,00
$M^1$	1,40	2,60	1,18	0,45	0,88
$M^2$	0,00	0,59	1,30	0,00	0,00
$M^3$	-0,21	-0,38	-0,61	-0,23	-0,46
FINAL M	0,52	6,98	-2,30	2,87	-0,57

#### 8.5. ESTRUCTURAS BAJO ACCIONES REPRESENTADAS POR MOVIMIENTOS Y DEFORMACIONES IMPUESTAS

En una estructura pueden existir acciones distintas de las fuerzas y esfuerzos impuestos, que adoptan forma de movimientos o deformaciones iniciales. Estas acciones cinemáticas pueden proceder de asentamientos en la cimentación (movimientos impuestos) o bien modificaciones en la forma inicial de las barras debido a temperatura, defectos constructivos, etc.

La técnica de cálculo, es esencialmente idéntica al caso de acciones estáticas. Es preciso obtener la solución inicial -momentos de empotramiento rígido y deformada que se producen de las distintas acciones cinemáticas. A continuación se indican algunas correspondientes a casos frecuentes.

Ejemplo 8.11. Deducir los momentos de empotramiento rígido y la elástica de una viga biempotrada en sus extremos 1 y 2, de luz  $L$ , para cada una de las siguientes acciones: a). El extremo 1 gira un ángulo  $\theta$ . b). El extremo 2 se desplaza transversalmente respecto al 1 una magnitud  $\Delta$  (figura 8.23).

Aplicando las ecuaciones constitutivas de la viga, se deducen los momentos de empotramiento rígido para el caso de un giro  $\theta$  en el extremo 1.

$$M_1^0 = R_1 \theta_1 \quad \text{y} \quad M_2^0 = \gamma_{12} R_1 \theta_1$$

Si la sección es constante, se obtiene:

$$M_1^0 = \frac{4EI}{L} \theta_1 \quad \text{y} \quad M_2^0 = \frac{2EI}{L} \theta_1$$

La deformada se calcula aplicando los teoremas de Möhr, o bien directamente usando el procedimiento de la viga conjugada. En el caso de  $EI$  constante, la elástica es:

$$v(x) = \theta_1 x \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

En el caso de un desplazamiento relativo  $\Delta$  del extremo 2 respecto al 1, se deduce, de las ecuaciones constitutivas de la viga, y considerando los dos giros impuestos en los extremos de la barra ( $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\Delta}{L}$ ):

$$M_1^0 = -(R_1 + \gamma_{21} R_2) \frac{\Delta}{L}$$

$$M_2^0 = -(R_2 + \gamma_{12} R_1) \frac{\Delta}{L}$$

en donde el signo positivo de  $\Delta$  corresponde a giro de la barra - antihorario (positivo), según se muestra en la figura 8.23.

Si la barra es de sección constante, las expresiones anteriores se transforman en las siguientes:

$$M_1^0 = M_1^0 = - \frac{6EI}{L^2} \Delta$$

La deformada se obtiene a partir de las expresiones de la viga conjugada, sumándole el movimiento de giro de esta,  $\frac{\Delta}{L}$ , es decir:

$$y = \Delta \frac{x}{L} - x \int_x^L \left\{ -M_1^0 \left(1 - \frac{u}{L}\right) + M_2^0 \frac{u}{L} \right\} \left(1 - \frac{u}{L}\right) \frac{du}{EI(u)} - \\ - (L-x) \int_0^x \left\{ -M_1^0 \left(1 - \frac{u}{L}\right) + M_2^0 \frac{u}{L} \right\} \frac{u}{L} \frac{du}{EI(u)}$$

En el caso de sección constante, se obtiene:

$$y = \Delta \frac{x}{L} - \Delta \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(1 - \frac{2x}{L}\right) = \Delta \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left\{ 3 - 2 \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right\}$$

En la situación de barra articulada en el extremo 2, los momentos de empotramiento rígido serían los siguientes:

$$M_1^0 = R_1 (1 - \gamma_{12} \gamma_{21}) \theta \quad \text{y} \quad M_1^0 = -R_1 (1 - \gamma_{12} \gamma_{21}) \frac{\Delta}{L}$$

En el caso de sección constante se convierten, respectivamente, en:

$$M_1^0 = \frac{3EI}{L} \theta \quad \text{y} \quad M_1^0 = - \frac{3EI}{L^2} \Delta$$

Ejemplo 8.12. En la estructura de la figura 8.24a, calcular la reacción en el nudo 1 y los esfuerzos en la sección A central del dintel 3-5, cuando el nudo 4 sufre un descenso de un milímetro y un giro de  $10^{-3}$  radianes en sentido positivo, y la barra -

2-3 experimenta un incremento de temperatura de  $60^{\circ}$ .

Las características del material son:

Módulo de elasticidad  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ kg cm}^{-2}$ .

Coefficiente de dilatación  $k = 10^{-5}^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

Todas las barras son de sección rectangular de canto 0,40 y ancho 0,30.

La deformada del estado inicial de la estructura, tras los movimientos impuestos, se representa en la figura 8.24v (\*).

Esta deformada se deduce mediante un procedimiento de Williot que se comenta con detalle en el siguiente capítulo dedicado a las estructuras traslacionales. Aquí, si bien los nudos experimentan desplazamientos a pesar de ser la estructura intraslacional, estos movimientos iniciales impuestos, permanecen invariables en el mecanismo resistente de la estructura, lo que no ocurre en el caso de estructuras traslacionales.

Si se denomina  $\Delta$  a los movimientos transversales de cada barra, se obtiene el cuadro 8.10.

TABLA 8.10. Momentos de empotramiento rígido

BARRAS	$\Delta$ (mm)	L (m)	$\theta$	$M_{\Delta}^0$	$M_{\theta}^0$	$M_{\text{TOTAL}}$
1-2	2,0	6,71	-	0,853	-	0,853
2-1	2,0	6,71	-	0,853	-	0,853
2-3	12,3	6,0	-	6,56	-	6,56
3-2	12,3	6,0	-	6,56	-	6,56
3-4	5,0	6,0	$10^{-3}$	1,67	1,06	3,73
4-3	5,0	6,0	$10^{-3}$	2,67	2,13	4,80
3-5	11,2	6,71	-	-2,39	-	-2,39

NOTA(\*): Esta deformada inicial, que incluye los movimientos de los nudos, debe de sumarse a la modal con objeto de obtener la deformada final de la estructura. Ver el apartado 8.4.



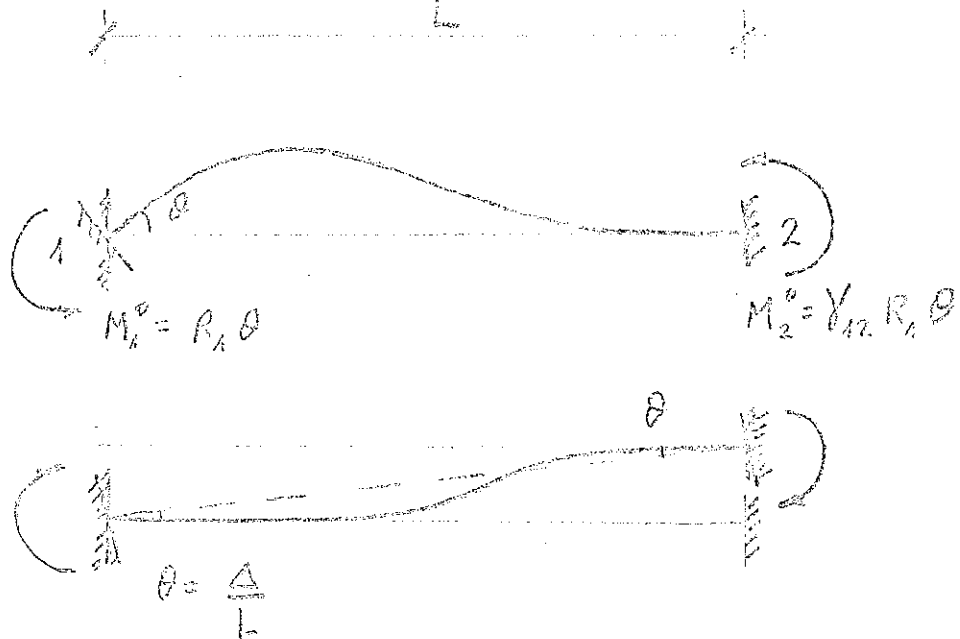
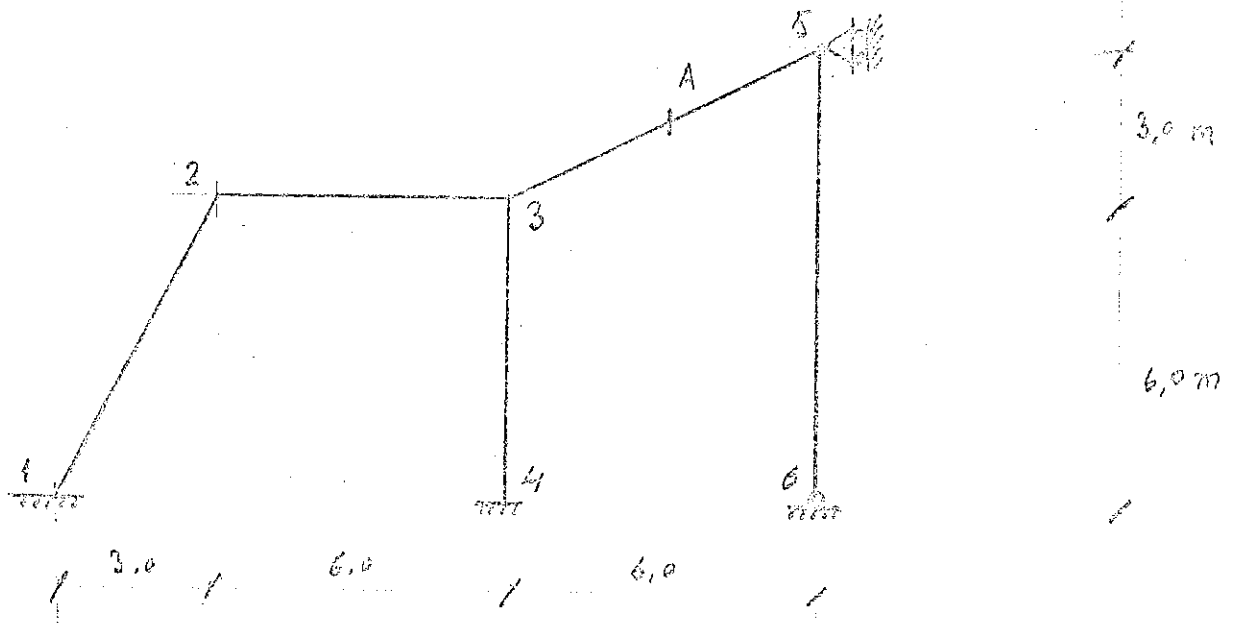
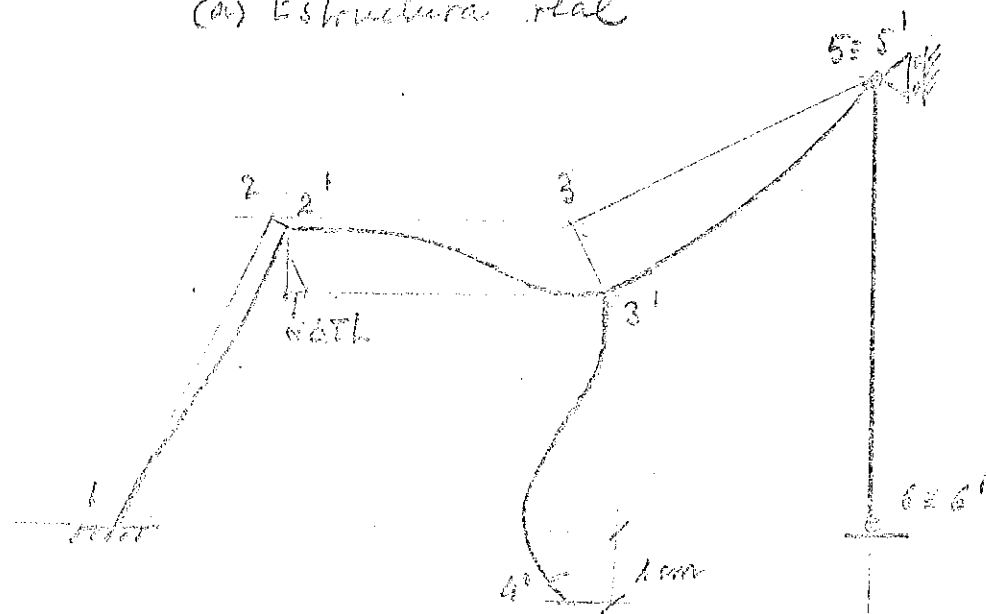


Figura 8.23. Solución inicial bajo movimientos impuestos.



(a) Estructura real



(b) Deformación inicial

Figura 8.24. Ejemplo 8.12.

En esta tabla 8.10 los momentos  $M_0^0$  y  $M_\Delta^0$  corresponden a los de empotramiento rígido debidos al giro  $\theta$  y desplazamiento transversal  $\Delta$ , respectivamente.

El cálculo de Cross conduce a los resultados finales de los momentos en los extremos de barras:

8.11. Momentos finales en extremos de barras.

NUDO	2		3			
BARRA	2-1	2-3	3-1	3-4	3-5	
M	-2,08	2,08	2,59	1,44	-4,00	mt

y  $M_{12} = -0,61 \text{ mt.}$

$M_{43} = 3,65 \text{ mt.}$

La reacción es el nudo 6 es:

$R_6 = 0,28 \text{ t.}$

Los esfuerzos en la sección A son (sentido de avance 3-5):

Momento flector  $\mu = 2,00 \text{ mt.}$

cortante  $q = 0,60 \text{ t.}$

axil  $v = -0,568 \text{ t.}$

Las estructuras, como es bien conocido, se cimentan en el suelo que se suele suponer rígido, lo cual en muchas ocasiones puede representar una idealización excesivamente alejada de la realidad. Por ello, los asientos impuestos permiten obviar esta pobre representación del suelo. Un método más adecuado y exacto consiste en llevar a cabo el cálculo conjunto estructura-terreno de cimentación -interacción suelo-estructura-, que, no obstante, sólo en casos excepcionales (deformabilidad elevada del terreno, importancia de la estructura, etc.) se estudia. Un modo de tener en cuenta esta interacción suelo-estructura consiste en sustituir el terreno por un muelle o conjunto de muelles elásticos (representación tipo Winkler). Las constantes elásticas de los muelles se deducen mediante experimentación. En el siguiente ejemplo se estudia un caso de tratamiento de una barra que se empotra elásticamente en el terreno. Por simplicidad, sólo se considera la interacción a la rotación, pero la extensión a otros movimientos es inmediata.

Ejemplo 8.13. Determinar la rigidez y el coeficiente de transmisión  $\gamma_{12}^*$  y  $R_1^* = R$  de una barra recta 1-2, con el extremo 2 empotrado elásticamente a la rotación, con constante de muelle  $k$ . Estas características se darán en términos de las flexibilidades  $f_{ij}$  o bien de las rigideces  $R_i$  y transmisión  $\gamma_{ij}$  de la barra 12, supuesta de nudos rígidos.

Según la figura 8.25 se puede escribir:

$$\theta_1 = f_{11} + \gamma f_{12} = \frac{1}{R}$$

$$\theta_2 = f_{21} + \gamma f_{22} = -\frac{\gamma}{k}$$

es decir

$$\gamma = - \frac{f_{21}}{f_{22} + \frac{1}{k}}$$

$$R = \frac{f_{22} + \frac{1}{k}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} + \frac{f_{11}}{k}}$$

En función de las rigideces se tiene, análogamente (figura 8.25b):

$$\theta_1 = \frac{1}{R_1} + \frac{\gamma_{21}}{R_1} R_2 \frac{\gamma}{k} = \frac{1}{R}$$

$$\gamma = \gamma_{12} - \frac{\gamma}{k} R_2 (1 - \gamma_{12} \gamma_{21})$$

con lo que resulta

$$\gamma = \frac{\gamma_{12}}{1 + \frac{R_2 (1 - \gamma_{12} \gamma_{21})}{k}}$$

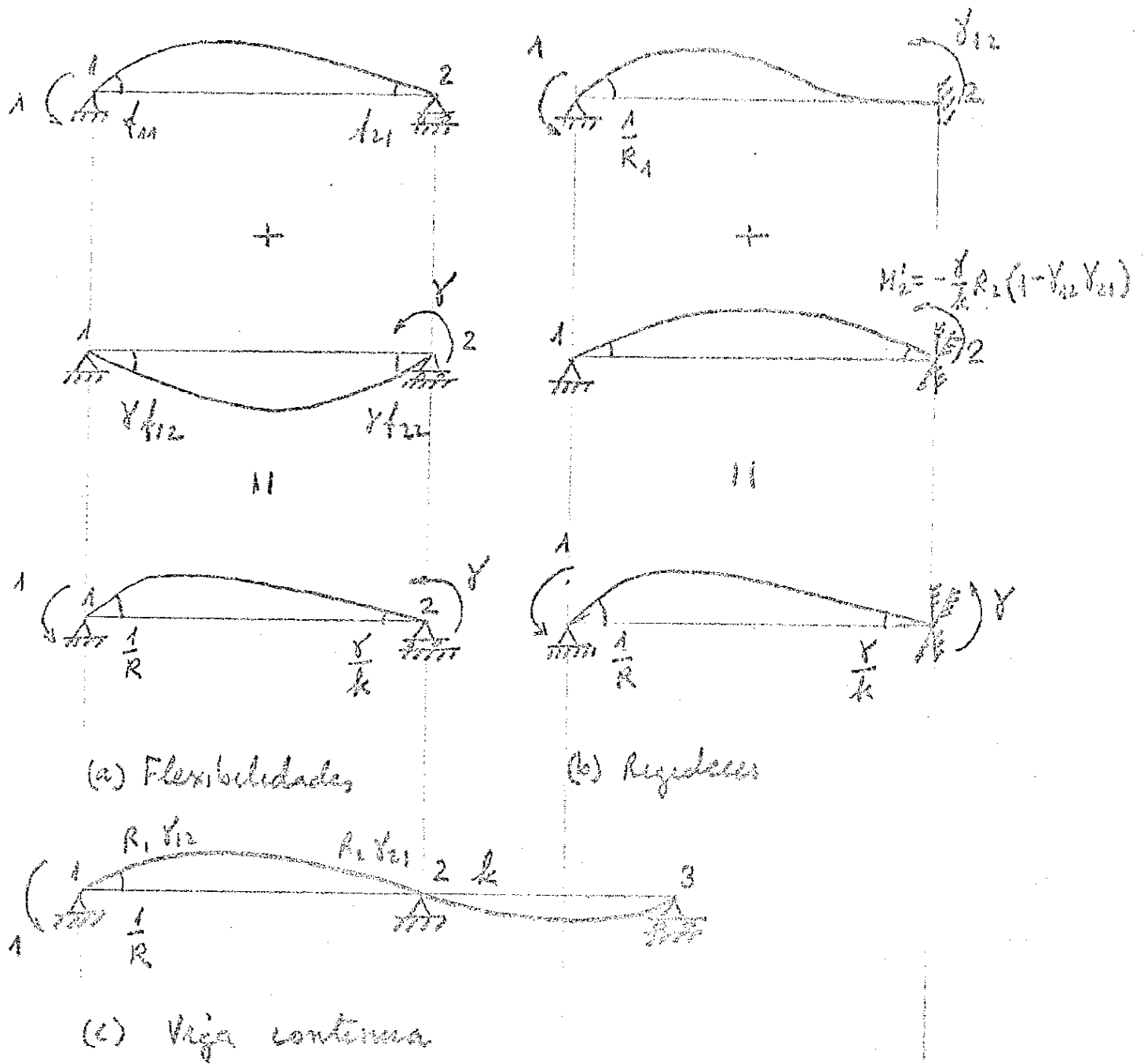


Figura 8.25. Ejemplo 8.13.

$$R = R_1 \frac{k + R_2(1 - \gamma_{12} \gamma_{21})}{k + R_2}$$

Evidentemente, un modo de tratar esta situación sin necesidad de utilizar barras con nuevas rigideces  $R_1^*$  y transmisión  $\gamma_{12}^*$  consiste en introducir una nueva barra a continuación del nudo, que simule el comportamiento estructural del muelle (figura 8.25c). Para ello se supone que la barra tiene una rigidez a la rotación igual a la constante de muelle  $k$ .

Si se deseara conocer la rigidez equivalente de la viga de dos vanos, se podría obtener mediante el método de Cross, suponiendo la actuación de un momento  $\textcircled{1}$  en el extremo 1 de la barra. Se deducen así los resultados siguientes:


#### 8.12. Cálculo de Cross

NUDO	1	
BARRAS	1-2	2-3
R	$R_1(1 - \gamma_{12}\gamma_{21})$	$k$
$M^0$	$\gamma_{12}$	$0$
$M^1$	$\frac{-\gamma_{12} R_1(1 - \gamma_{12}\gamma_{21})}{k + R_1(1 - \gamma_{12}\gamma_{21})}$	$\frac{-\gamma_{12} k}{k + R_1(1 - \gamma_{12}\gamma_{21})}$
FINAL M	$\frac{\gamma_{12} k}{k + R_1(1 - \gamma_{12}\gamma_{21})}$	$\frac{-\gamma_{12} k}{k + R_1(1 - \gamma_{12}\gamma_{21})}$

Por lo tanto el coeficiente de transmisión es:

$$\gamma = \frac{\gamma_{12} k}{k + R_1(1 - \gamma_{12} \gamma_{21})}$$

y la rigidez es la inversa del giro en 1, es decir:


$$\frac{1}{R} = \left( - \frac{\gamma_{12}}{k + R_1(1 - \gamma_{12} \gamma_{21})} \right) \left( - \frac{\gamma_{21}}{R_1} R_2 \right)$$

que coincide con el valor hallado anteriormente.

#### 8.6. CASOS ESPECIALES. BARRAS CON ARTICULACIONES INTERMEDIAS

El método de Cross permite obtener en un entramado plano intraslacional, sobre el que actúan en sus nudos un conjunto de momentos exteriores, los giros en estos nudos y los momentos en los extremos de las barras, reacción de la estructura sobre éstas. Mediante este procedimiento, es posible calcular el entramado bajo cargas arbitrarias considerando una superposición de dos estados: inicial, de empotramiento rígido en todos los nudos y modal, que equilibra los momentos exteriores producidos en el empotramiento ficticio de los nudos en el estado anterior. La respuesta de la estructura -esfuerzo o movimiento- se calcula, pues, como suma de la obtenida en cada uno de los dos estados anteriores. A veces esta respuesta total se suele, por comodidad de cálculo, descomponer en las situaciones: isostática e hiperestática. La primera corresponde al entramado con momentos nulos en los extremos de las barras (articulación en los nudos) y la segunda introduce la respuesta debida a los momentos finales del cálculo, en los extremos de las barras (nudos rígidos). Estos momentos se calculan en la aplicación práctica del método de Cross de un modo conjunto, ya que se suman los momentos ( $M_i^0$ ) de empotramiento rígido. Este procedimiento es totalmente válido en la mayoría de las situaciones reales; sin embargo pueden existir excepciones (barras con articulaciones intermedias) en las que la situación isostática corresponde a un mecanismo. El siguiente ejemplo muestra el modo de proceder en estos casos.

Ejemplo 8.14.

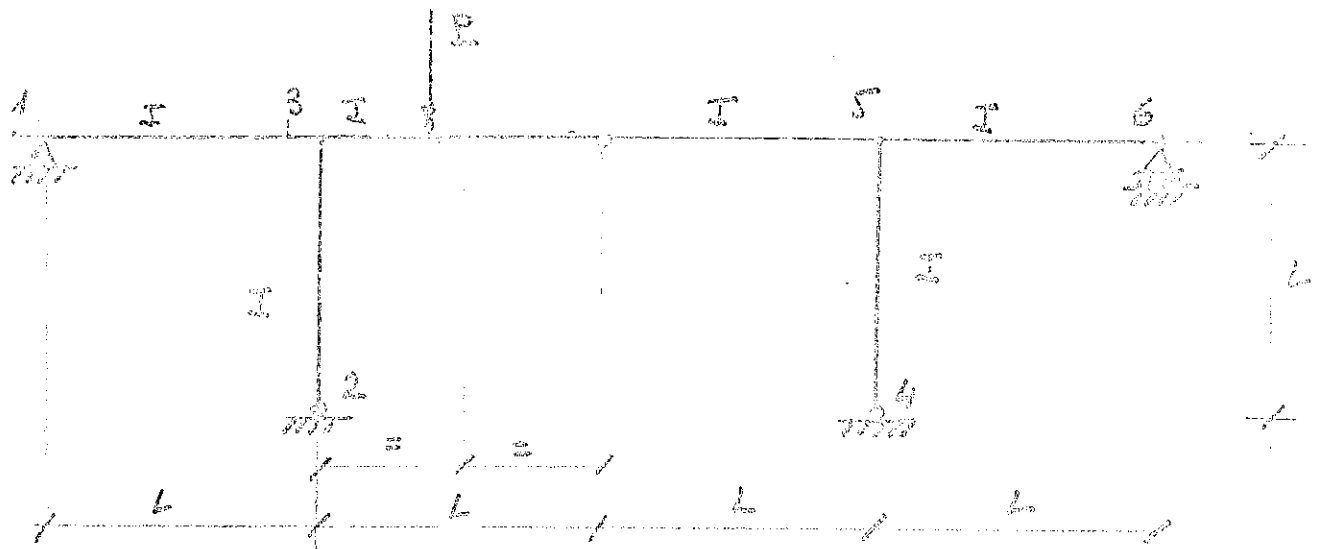
Calcular la estructura de la figura 8.26a, que representa longitudinalmente la de un puente pórtico con una articulación central, bajo la acción de la carga representada.

Esta estructura evidentemente podría ser tratada mediante superposición de dos estados, simétrico y antisimétrico, como indica el siguiente cuadro.

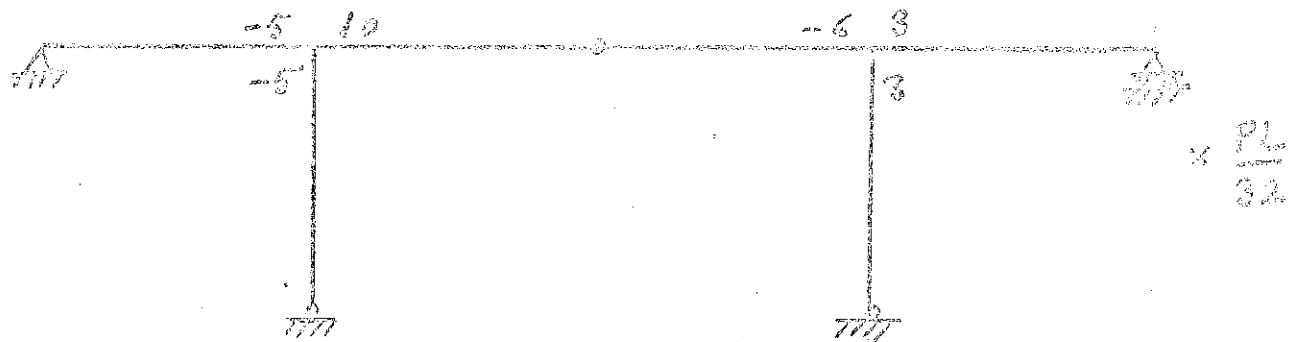
TABLA 8.13. Cálculo de Cross.

NUDO	3			Observaciones
BARRA	3-1	3-2	3-5	
R	$\frac{3EI}{L}$	$\frac{3EI}{L}$	0	Estado Simétrico
k	0,5	0,5	0	
M <sup>0</sup>	0	0	$\frac{PL}{4}$	
M <sup>1</sup>	$-\frac{PL}{8}$	$-\frac{PL}{8}$		
FINAL M	$-\frac{PL}{8}$	$-\frac{PL}{8}$	$\frac{PL}{4}$	
R	$\frac{3EI}{L}$	$\frac{3EI}{L}$	$\frac{3EI}{L}$	Estado Antisimétrico
k	0,33	0,33	0,33	
M <sup>0</sup>	0	0	$\frac{3PL}{32}$	
M <sup>1</sup>	$-\frac{PL}{32}$	$-\frac{PL}{32}$	$-\frac{PL}{32}$	
FINAL M	$-\frac{PL}{32}$	$-\frac{PL}{32}$	$\frac{2PL}{32}$	

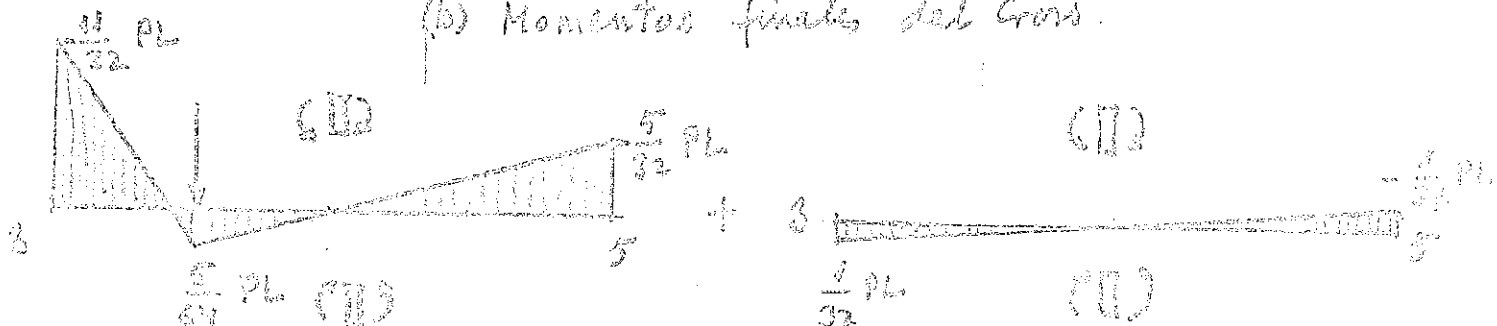
Sin embargo se puede proceder al cálculo sin considerar



(a) Estructura real.

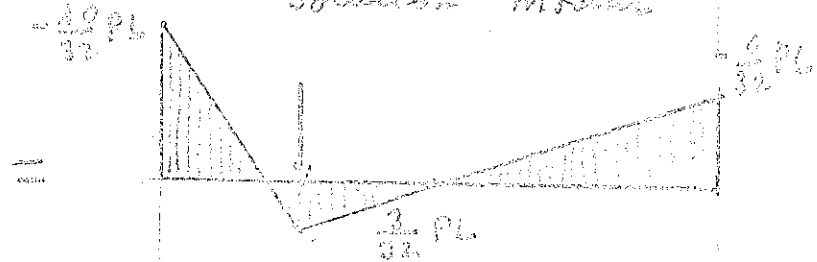


(b) Momentos finales del Cross.



Solución inicial

Solución modificada



Solución final

(c) Determinación de la ley de momentos, primero, en la barra 3-5



$$M_3^0 = R_1 \theta_1 + R_2 \theta_2, \theta_2 = 0$$

$$M_5^0 = R_2 \theta_2 + R_1 \theta_1, \theta_1 = 0$$

(d) Movimiento relativo de la barra 3-5

Figura 8.26. Ejemplo 8.14.



la propiedad de simetría de la estructura, deduciendo las características de la barra 3-5, con la articulación en la sección central, de acuerdo con las fórmulas obtenidas en el problema 7.6. Así, se calculan los valores para la barra 3-5:

$$R_1 = R_2 = \frac{3EI}{2L}$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = 1$$

Los momentos de empotramiento rígido son:

$$M_1^0 = \frac{11}{32} PL$$

$$M_2^0 = -\frac{5}{32} PL$$

El cálculo de Cross se resume en la siguiente tabla:

TABLA 8.14. Cálculo de Cross

NUDO	3			5		
BARRA	3-1	3-2	3-5	5-3	5-4	5-6
R	$\frac{3EI}{L}$	$\frac{3EI}{L}$	$\frac{3}{2} \frac{EI}{L}$	$\frac{3}{2} \frac{EI}{L}$	$\frac{3EI}{L}$	$\frac{3EI}{L}$
k	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\gamma$	0,5	0,5	1	1	0,5	0,5
$M^0$	0	0	$\frac{11}{32} PL$	$-\frac{5}{32} PL$	0	0
$M^1$	$-\frac{11}{80} PL$	$-\frac{11}{80} PL$	$-\frac{11}{160} PL$	$\frac{1}{32} PL$	$\frac{2}{16} PL$	$\frac{1}{16} PL$
$M^2$	0	0	$\frac{1}{32} PL$	$-\frac{11}{160} PL$	0	0
$M^3$	$-\frac{1}{80} PL$	$-\frac{1}{80} PL$	$-\frac{1}{160} PL$	$\frac{11}{800} PL$	$\frac{41}{400} PL$	$\frac{11}{400} PL$
$M^4$	0	0	$\frac{11}{800} PL$	$-\frac{1}{160} PL$	0	0
$M^5$	$-\frac{11}{2000} PL$	$-\frac{11}{2000} PL$	$-\frac{1}{4000} PL$	$\frac{1}{800} PL$	$\frac{1}{400} PL$	$\frac{1}{400} PL$
FINAL M	-0,156PL	-0,156PL	0,312PL	-0,186	0,093	0,093

Los resultados de la tabla 8.14 coinciden con los obtenidos anteriormente.

Al determinar las leyes de momentos flectores, se observa que en la viga central 3-5 no se pueden calcular las leyes de momentos isostáticos (en la viga biapoyada) ya que constituye un mecanismo, al existir una articulación central. Estas leyes isostáticas de esfuerzos deben ser sumadas a las hiperestáticas que se deducen directamente de los resultados del Cross como acciones exteriores en la viga articulada en sus extremos. Se obvia esta dificultad recuperando la idea original del método de Cross, y sumando las dos soluciones, inicial y modal, que corresponden siempre a barras estables, tal como se ilustra en la figura 8.26c.

Análogo problema aparece en la determinación de los giros en los apoyos, ya que en la barra 3-5 existe la posibilidad de una rotación simétrica de sus apoyos empotrados sin que aparezcan momentos de empotramiento rígido (figura 8.26d). Alternativamente, este hecho implica que no es posible conocer los ángulos de giro  $\theta_1$  y  $\theta_2$  de los extremos de la barra 3-5, a partir de las ecuaciones constitutivas de la barra, expresadas por las ecuaciones (8.26), (8.27) y (8.28), ya que son ahora linealmente dependientes. La única posibilidad válida corresponde a utilizar la expresión (8.25). En este caso se obtiene:

$$\theta_{35} = \frac{\left(-\frac{11}{160} - \frac{1}{160} - \frac{1}{4000}\right) PL}{\frac{3EI}{2L}} = -\frac{301}{6000} \frac{PL^2}{EI} = -0,050 \frac{PL^2}{EI}$$

$$\theta_{53} = \frac{\left(\frac{1}{32} + \frac{11}{800} + \frac{1}{800}\right) PL}{\frac{3EI}{2L}} = \frac{37}{1200} \frac{PL^2}{EI} = 0,031 \frac{PL^2}{EI}$$

Estos valores, sin embargo, son aproximados, ya que únicamente se han considerado tres etapas de reparto en el cálculo de Cross. Se pueden obtener los valores exactos considerando las barras concurrentes. En efecto, estos valores deben de coincidir

con los giros de los restantes extremos de las barras coincidentes, es decir:

$$\theta_{35} = \theta_{32} = \theta_{31}$$

(8.30)

$$\theta_{53} = \theta_{54} = \theta_{56}$$

Los valores de los giros de las barras restantes se deducen directamente de los resultados finales del cálculo de Cross, como sigue:

$$\theta_{32} = \theta_{31} = \frac{-\frac{5}{32} PL}{\frac{3EI}{L}} = -\frac{5}{96} \frac{PL^2}{EI} = -0,052 \frac{PL^2}{EI} \approx \theta_{35}$$

$$\theta_{54} = \theta_{56} = \frac{\frac{3}{32} PL}{\frac{3EI}{L}} = \frac{1}{32} \frac{PL^2}{EI} = 0,031 \frac{PL^2}{EI} \approx \theta_{53}$$

Se observa que la suma de los ángulos en los extremos de la barra 3-5 es:

$$\theta_{35} + \theta_{53} = \left(-\frac{5}{96} + \frac{1}{32}\right) \frac{PL^2}{EI} = -\frac{1}{48} \frac{PL^2}{EI}$$

que coincide, como comprobación, con la suma obtenida a partir de las ecuaciones constitutivas de la barra 3-5. En este caso, las dos ecuaciones (8.26) se convierten en la única siguiente:

$$-\frac{PL}{32} = \frac{3EI}{2L} (\theta_{35} + \theta_{53})$$

### EJERCICIOS. ENUNCIADOS

8.1. En una viga de nudos 1 y 2 de sección variable, de luz  $L$ , se conocen los valores de sus rigideces  $R_1$  y  $R_2$ , así como sus coeficientes de transmisión  $\gamma_{12}$  y  $\gamma_{21}$ . Se considera una viga simétrica de luz  $2L$ , constituida por la dada y su simétrica respecto al nudo 2, en la que se desea determinar:

- 1) Rigidez  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  y transmisión  $g_{12} = g_{21} = g$ .
- 2) Momentos de empotramiento rígido bajo una carga uniforme de intensidad  $p$ , extendida a toda su luz  $\mu_1^0 = -\mu_2^0 = \mu$ , conocidos los momentos de empotramiento rígido,  $M_1^0$  y  $-M_2^0$ , en la viga original 1-2 bajo carga gravitatoria de intensidad  $p$  uniforme en toda su luz.

8.2. Calcular la rigidez  $R_1^* = R$  y la transmisión  $\gamma_{12}^* = \gamma$  de una barra recta de nudos 1-2 y longitud  $L$ , suponiendo que su extremo 2 está apoyado transversalmente en un muelle elástico de constante  $k$ , pero que no permite el giro de la sección.

8.3. En una barra recta de sección variable y longitud  $L$ , cuyos extremos se representan por 1 y 2, se conocen las rigideces  $R_1$  y  $R_2$  y el coeficiente de transmisión  $\gamma_{12}$ .

Sea la pieza recta 1'-2' compuesta por tres barras en serie. La primera, 1'-1, de longitud  $a_1$ , se supone infinitamente rígida a flexión; la segunda, es la barra anterior 1-2, de longitud  $L$ , y la tercera, 2-2', es una nueva barra rígida de longitud  $a_2$ .

Se desea obtener las rigideces ( $R_1'$  y  $R_2'$ ) y coeficientes de transmisión ( $\gamma_{12}'$  y  $\gamma_{21}'$ ) de la barra 1'-2'.

Aplicación numérica:

$$R_1 = 0,8 \cdot 10^5 \text{ mt.}$$

$$R_2 = 1,1 \cdot 10^5 \text{ mt.}$$

$$\gamma_{12} = 0,6$$

$$a_1 = 2 \text{ m.}$$

$$a_2 = 3 \text{ m.}$$

$$L = 10,0 \text{ m.}$$

8.4. Calcular las flexibilidades  $f_{ij}^i$  ( $i, j = 1, 2$ ) de la pieza 1'-2' del problema 8.2. en función de las flexibilidades  $f_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) de la barra recta 1-2 y de las longitudes  $a$  y  $b$ .

8.5. Calcular la rigidez de una viga semiinfinita, de sección uniforme ( $EI$ ), inmersa en un medio elástico de módulo de balasto (constante de muelle por unidad longitud) de valor  $k$ .

Este problema permite simular el comportamiento de un pilote. Se sugiere utilizar la ecuación diferencial de la viga sobre cimentación elástica.

8.6. En una pieza recta de nudos extremos 1 y 2, con sección constante ( $EI$ ) y luz  $L$ , se desea determinar sus rigideces y coeficientes de transmisión. Durante la construcción de la barra se ha producido un defecto en la sección situada a una distancia  $\lambda L$  del extremo 1 ( $0 < \lambda < 1$ ).

A efectos del cálculo anterior se realizan respecto al comportamiento de dicha sección las tres hipótesis excluyentes que siguen:

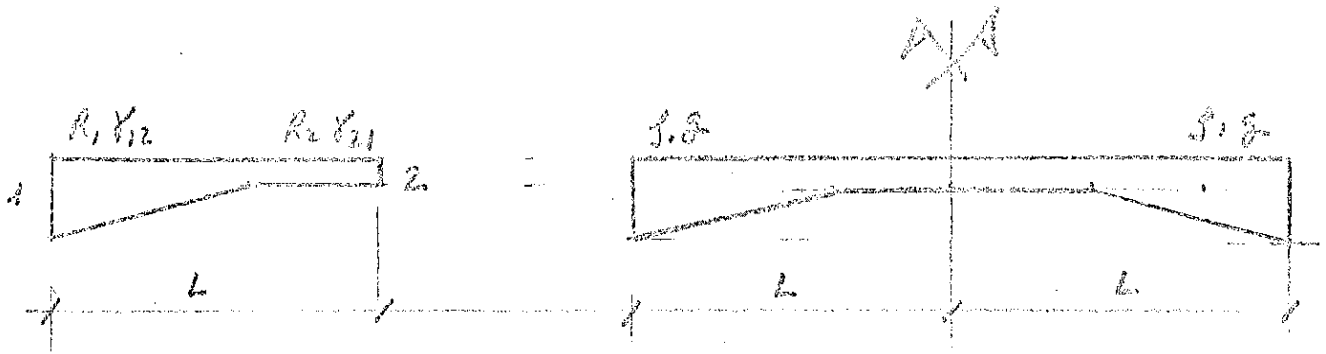


Figura 8.27. Ejercicio 8.1.

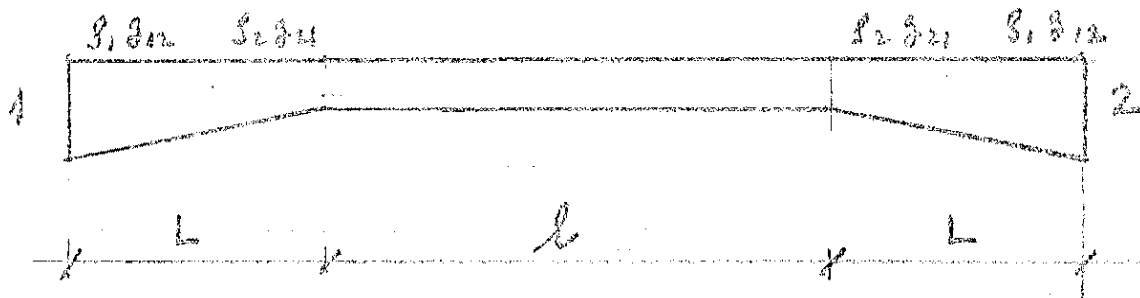


Figura 8.28. Ejercicio 8.9.

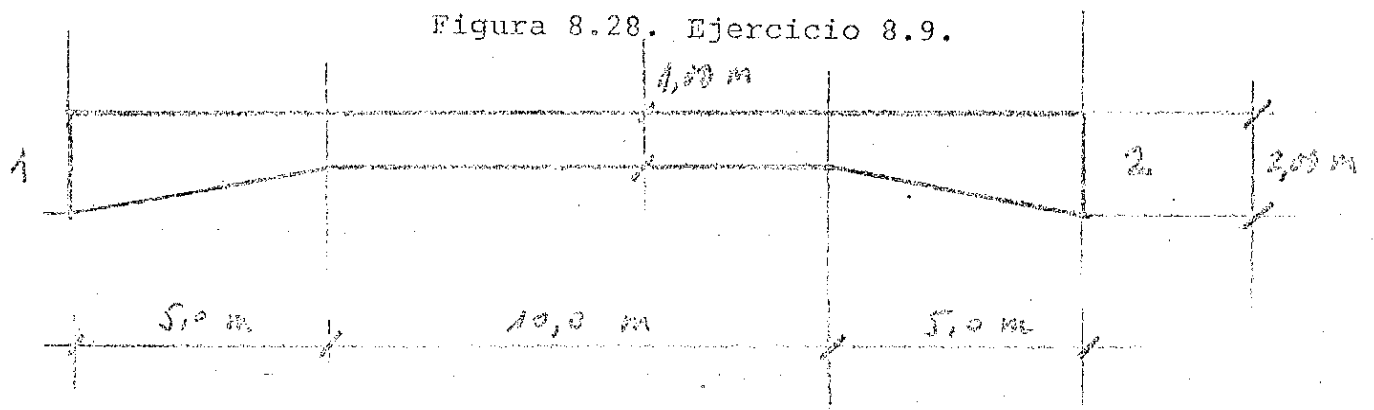


Figura 8.29. Ejercicio 8.10.

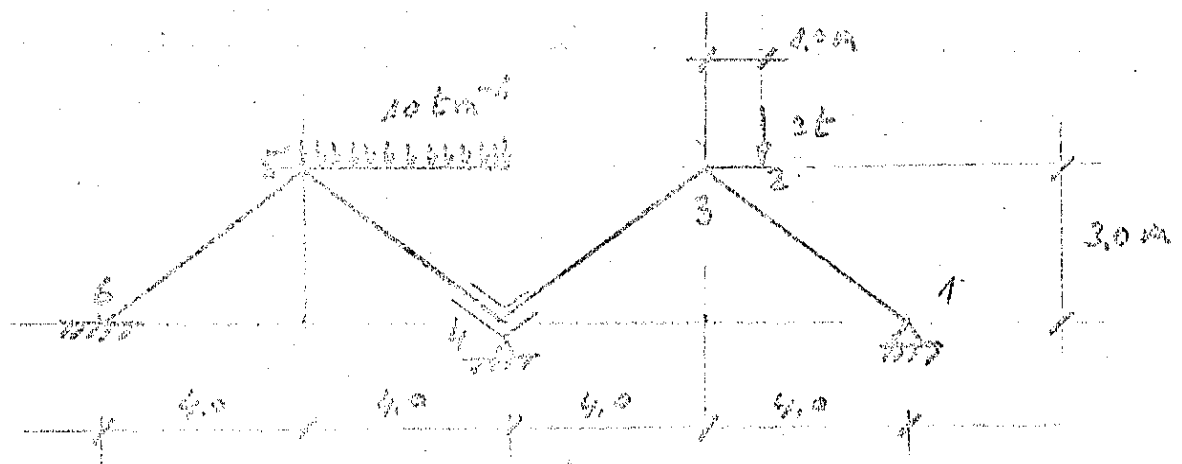


Figura 8.30. Ejercicio 8.11.

Hipótesis 1. Se supone que el defecto no altera ninguna de las características resistentes a flexión de la barra.

Hipótesis 2. Se supone que el deterioro de la sección es tal que se produce una articulación, es decir, es incapaz de resistir momentos flectores.

Hipótesis 3. Se produce una articulación con rozamiento, es decir, si existe una diferencia de giros entre las dos caras (dorsal y frontal) de la sección, de valor  $\theta$ , aparece un momento flector  $m$ , tal que

$$\theta = f \frac{L m}{3EI}$$

siendo  $f$  un coeficiente conocido.

Obtener para cada una de las hipótesis las características elastomecánicas de la barra.

- 8.7. La barra recta de extremos 1 y 2 tiene una longitud  $L$ . Se sabe que si se supone articulada en 1 y empotrada en 2 aparece un giro en 1,  $\theta_1$ , y un momento en 2,  $M_2$ , cuando sufre un movimiento relativo  $\Delta$  de un extremo respecto al otro. Por otro lado, si se supone biapoyada en sus extremos, la aplicación de un momento unidad en 1 produce un giro  $\theta_2$  en el extremo 2.

Se desea conocer las rigideces y coeficientes de transmisión de la barra.

Aplicación numérica:

$$L = 4 \text{ m}; \quad \Delta = 0,01 \text{ m}; \quad \theta_1 = 2 \cdot 10^{-4}; \quad M_2 = -4 \text{ mt}; \quad \theta_2 = 4 \cdot 10^{-5}$$

7-

- 8.8. Del comportamiento elástico de una barra recta 1-2 de sección variable se sabe lo siguiente.

Si se supone la barra biarticulada en sus extremos y se aplica un momento unidad en 2, aparecen los giros  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Por otra parte, si la barra se encuentra biempotrada y se produce un desplazamiento relativo unidad del extremo 2 respecto al 1, los momentos de empotramiento son  $M_1^0$  y  $M_2^0$ .

Determinar, con los únicos datos anteriores, si es posible conocer los valores de las rigideces y coeficientes de transmisión de la barra.

- 8.9. Determinar las rigideces y coeficientes de transmisión de la viga compuesta de la figura 8.28. en la que las vigas extremas, de longitud  $L$ , tienen unas características conocidas  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $g_{12}$  y  $g_{21}$  y la barra central de luz  $l$  es de rigidez infinito a flexión.

Aplicación numérica:

$$\rho_1 = 20,12 \cdot 10^3 \text{ mt}; \quad \rho_2 = 6,66 \cdot 10^3 \text{ mt.}$$

$$g_{12} = 0,32 \quad ; \quad g_{21} = 0,96$$

$$l = 10 \text{ m.} \quad ; \quad L = 4 \text{ m.}$$

- 8.10. Calcular la rigidez simétrica de la viga recta de ancho constante de la figura 8.29. y los momentos de empotramiento rígido bajo la acción de una carga gravitatoria uniforme de  $-2,0 \text{ tm}^{-1}$  extendida en toda la luz. Módulo de elasticidad del material  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}$ .

- 8.11. Calcular en la estructura de la figura 8.30, solicitada por las acciones indicadas: a) Leyes de esfuerzos. b) Desplazamiento vertical del nudo 2.



Todas las barras son de sección  $0,5 \times 0,30 \text{ m}^2$  y módulo de elasticidad  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}$ .

- 8.12. En la estructura de la figura 8.31 hallar las leyes de esfuerzos.

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ kg cm}^{-2}.$$

- 8.13. Hallar las leyes de esfuerzos en la estructura de edificación de la figura 8.32. cuando actúa una carga de viento de  $2 \text{ tm}^{-1}$  sobre la fachada.

Todas las barras son de sección  $0,40 \times 0,20 \text{ m}^2$  y el módulo de elasticidad es  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ tm}^{-2}$ .

- 8.14. Determinar la flecha en la sección A de la viga continua de la figura 8.33.

Aplicación numérica:  $P = 100 \text{ t.}; \quad a = 600 \text{ m.}$

Viga de ancho constante  $b = 0,30 \text{ m.}$  Cantos:  $c_1 = 0,45$  y  $c_2 = 0,90$ .

Módulo de elasticidad:  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}; \quad \lambda = 0,375$ .

- 8.15. En la estructura de la figura 8.34. todas las barras son de sección rectangular constante (canto  $0,50 \text{ m}$  y ancho  $0,30 \text{ m}$ ), excepto la 2-3, que es simétrica y de sección variable. Esta barra se comporta como sigue:

Si se supone articulada en sus extremos y se aplica un momento de  $1 \text{ mt.}$  en el extremo 2 aparecen los ángulos:

$$\theta_2 = 6,0 \cdot 10^{-5} \quad \text{y} \quad \theta_3 = -4,0 \cdot 10^{-5} \text{ radianes.}$$

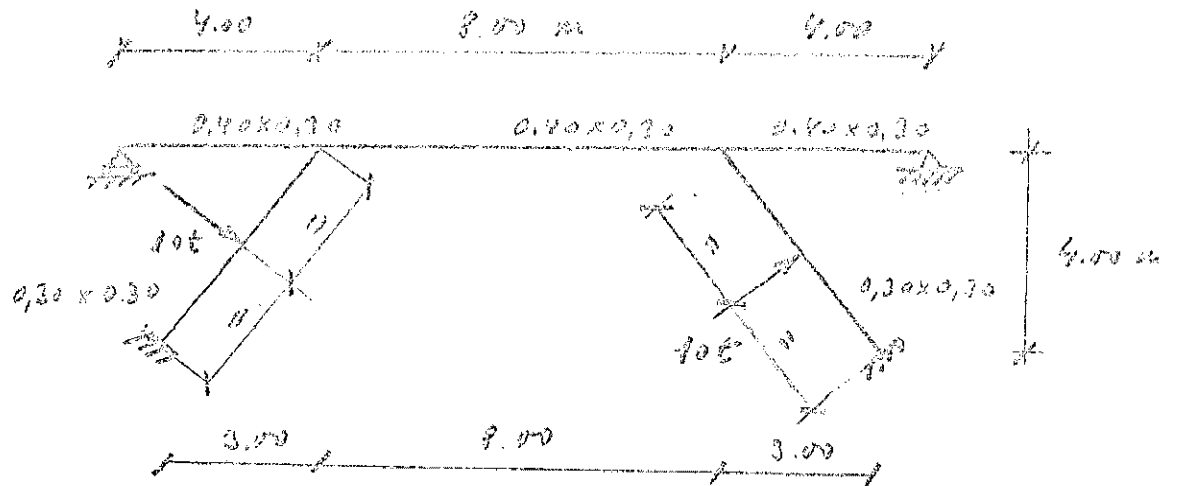


Figura 8.31. Ejercicio 8.12.

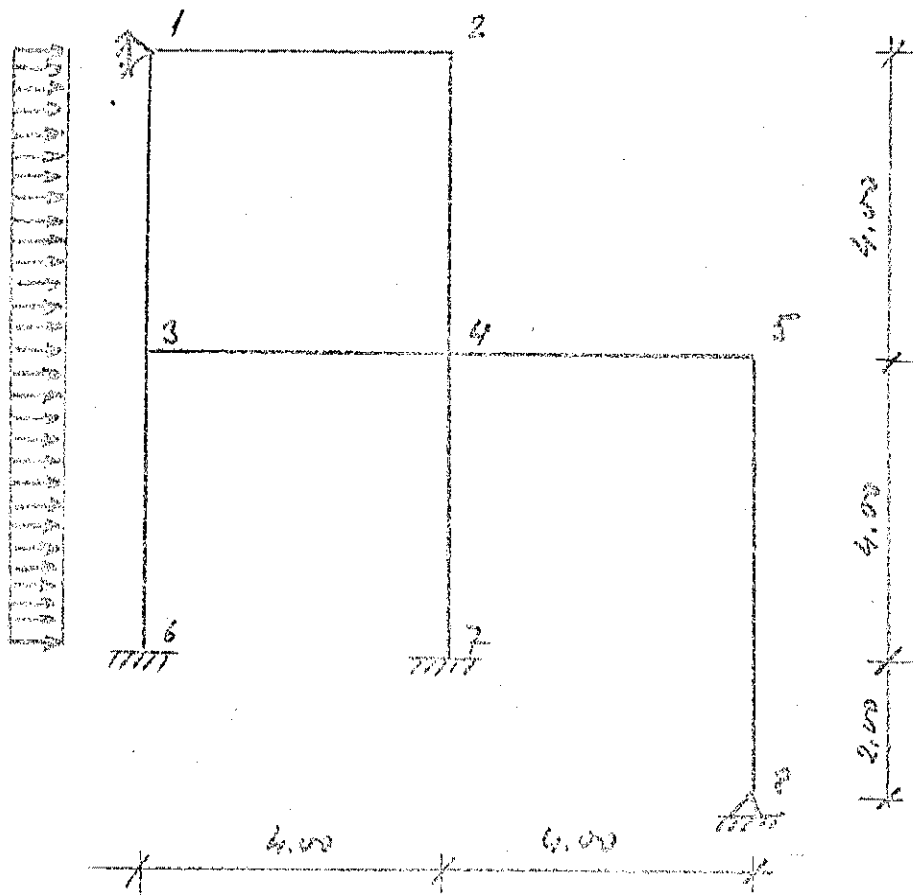


Figura 8.32. Ejercicio 8.13.

En cambio si actua una carga de  $1 \text{ tm}^{-1}$  en toda la luz aparecen giros de  $3,0 \cdot 10^{-4}$  radianes.

Calcular los esfuerzos en la sección central de la viga 2-3.

- 8.16. La estructura de la figura 8.35 se encuentra sometida a un incremento de temperatura de  $40^\circ$  en todas sus barras.

Características de las barras:

Sección de  $0,40 \cdot 0,30 \text{ m}^2$ . y módulo de elasticidad  $2 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}$ .

El coeficiente de dilatación térmica es  $10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

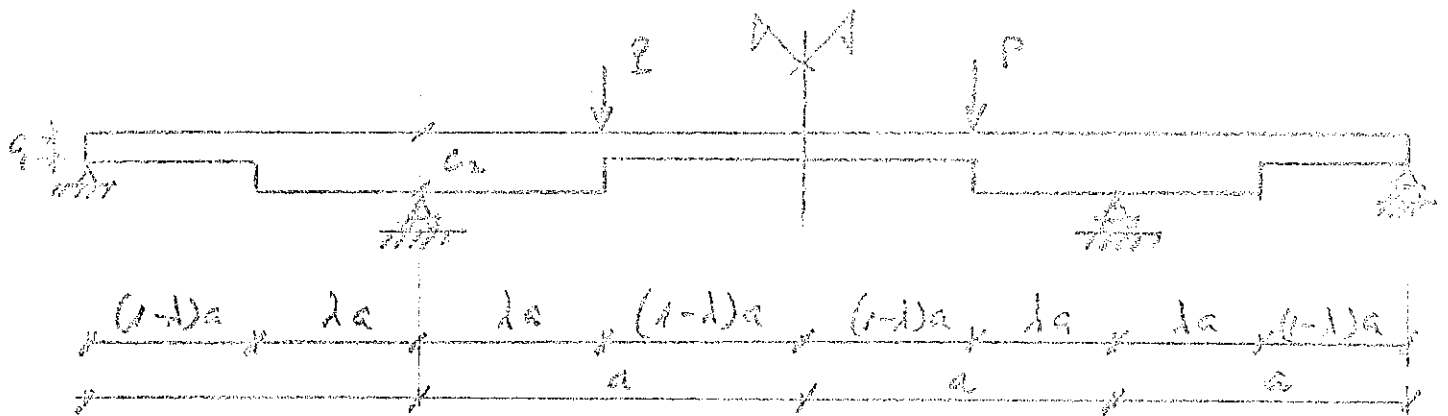


Figura 8.33. Ejercicio 8.14.

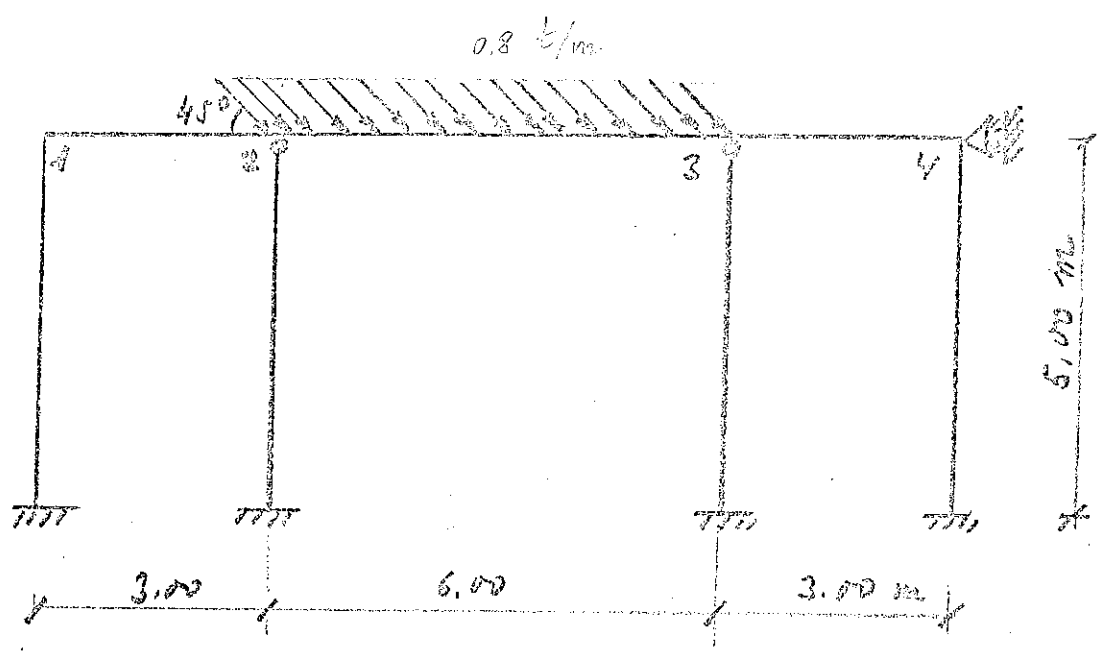


Figura 8.34. Ejercicio 8.15.

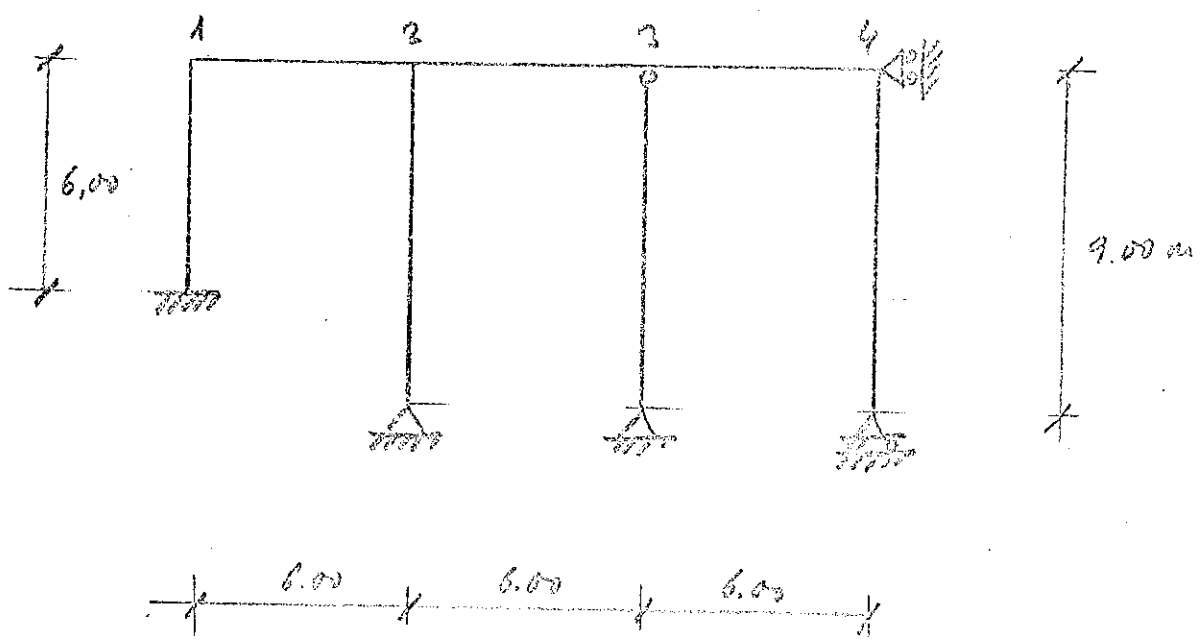


Figura 8.35. Solución ejercicio 8.11.

EJERCICIOS. SOLUCIONES

$$8.1. \rho = \frac{1}{2}(\rho_{sim} + \rho_{ant}); \quad g = \frac{\rho_{ant} - \rho_{sim}}{\rho_{ant} + \rho_{sim}}$$

siendo

$$\rho_{sim} = \frac{R_1 R_2 (1 - \gamma_{12} \gamma_{21})}{R_2 (1 + \gamma_{21}) + R_1 (1 + \gamma_{12})}$$

$$\rho_{ant} = R_1 (1 - \gamma_{12} \gamma_{21})$$

Si la viga inicial es simetrica  $R_1 = R_2 = R$  y  $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma$  los valores anteriores se convierten en los siguientes:

$$\rho = \frac{R}{4}(2\gamma + 3)(1 - \gamma) \quad y \quad g = \frac{2\gamma + 1}{2\gamma + 3}$$

$$u_1^0 = M_1^0 + \frac{(R_1 + R_2 \gamma_{21})(M_2^0 - M_1^0 + \frac{pL^2}{2})}{R_2(1 + \gamma_{21}) + R_1(1 + \gamma_{12})}$$

Si  $R_1 = R_2 = R$  y  $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma$  así como los momentos de empotramiento rígido son iguales en valor absoluto  $M_1^0 = M_2^0 = M^0$  se obtiene:

$$u^0 = M^0 + \frac{pL^2}{4}$$

$$8.2. \quad R = \frac{f_{22} + \frac{1}{L^2 k}}{(f_{11} f_{22} - f_{12}^2) + \frac{1}{L^2 k} (f_{11} + f_{22} - 2f_{12})}$$

$$\gamma = \frac{f_{21} + \frac{1}{L^2 k}}{f_{22} + \frac{1}{L^2 k}}$$

En función de las rigideces y transmisiones resulta:

$$-R_2(1-\gamma_{12}\gamma_{21}) \frac{1+\gamma}{Lk} + \gamma_{12} = \gamma$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1+\gamma}{Lk} + \frac{1+\gamma}{Lk} \frac{R_2}{R_1} \gamma_{21} = \frac{1}{R}$$

es decir

$$\gamma = \frac{\gamma_{12} - R_2(1-\gamma_{12}\gamma_{21})}{1+R_2(1-\gamma_{12}\gamma_{21}) \frac{1}{Lk}}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \left\{ \frac{(\gamma_{21} + 1)(R_1 + R_2)}{(1+R_2(1-\gamma_{12}\gamma_{21}) \frac{1}{Lk}) \frac{1}{Lk}} + 1 \right\}$$

$$8.3. R'_1 = R_1 \left\{ 1 + \frac{2a_1}{L}(1+\gamma_{12}) + \frac{a_1^2}{L^2} (1+2\gamma_{12} + \frac{R_2}{R_1}) \right\}$$

$$R'_2 = R_2 \left\{ 1 + \frac{2a_2}{L}(1+\gamma_{12} \frac{R_1}{R_2}) + \frac{a_2^2}{L^2} (1+2\gamma_{12} \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_2}) \right\}$$

$$\gamma'_{12} = \frac{R_1\gamma_{12} + \frac{R_2a_1+R_1a_2}{L} + \gamma_{12} \frac{R_1}{L} (a_1+a_2) + \frac{a_1a_2}{L^2} (R_1+R_2+2\gamma_{12}R_1)}{R_1 + \frac{2R_1a_1}{L} + 2\gamma_{12}R_1 \frac{a_1}{L} + \frac{a_1^2}{L^2} (R_1+R_2+2\gamma_{12}R_1)}$$

$$\gamma'_{21} = \gamma'_{12} \frac{R'_1}{R'_2}$$

$$R'_1 = 1,4264 \cdot 10^5 ; \quad R'_2 = 2,3054 \cdot 10^5 ; \quad \gamma'_{12} = 0,928 ; \quad \gamma'_{21} = 0,574$$

8.4. Sea  $\int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^n \frac{dx}{EI} = I_n$ , entonces

$$f_{11} = I_0 - 2I_1 + I_2$$

$$f_{12} = -I_1 + I_2$$

$$f_{22} = I_2$$

$$f'_{11} = \frac{1}{(L+a_1+a_2)^2} \{ (L+a_2)^2 I_0 - 2(L+a_2)L I_1 + L^2 I_2 \}$$

$$f'_{12} = \frac{1}{(L+a_1+a_2)^2} \{ (L+a_2)a_1 I_0 + (L+a_2-a_1)L I_1 - L^2 I_2 \}$$

$$f'_{22} = \frac{1}{(L+a_1+a_2)^2} \{ a_1^2 I_0 + 2a_1 L I_1 + L^2 I_2 \}$$

es decir

$$f'_{11} = \frac{1}{(L+a_1+a_2)^2} \{ f_{11}(L+a_2)^2 - 2f_{12}(L+a_2)a_2 + f_{22}a_2^2 \}$$

$$f'_{12} = - \frac{1}{(L+a_1+a_2)^2} \{ (L+a_2)a_1 f_{11} - f_{12} \{ L(L+a_1+a_2) + 2a_1a_2 \} + (L+a_1)a_2 f_{22} \}$$

$$f'_{22} = \frac{1}{(L+a_1+a_2)^2} \{ f_{11}a_1^2 - 2f_{12}(L+a_1)a_1 + f_{22}(L+a_1^2) \}$$

$$8.5. \quad R = 2EI \beta \quad \text{con} \quad \beta^4 = \frac{k}{4EI}$$

$$8.6. \quad \text{Hip 1.- } R_1 = R_2 = 4 \frac{EI}{L}; \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = 0,5$$

$$\text{Hip 2.- } R_1 = \frac{3\lambda^2}{1-3\lambda(1-\lambda)} \frac{EI}{L}$$

$$R_2 = \frac{3(1-\lambda)^2}{1-3\lambda(1-\lambda)} \frac{EI}{L}$$

$$\gamma_{12} = \frac{1-\lambda}{\lambda}$$

$$\gamma_{21} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

$$\text{Hip 3.- } R_1 = \frac{4(9\lambda^2 + f)}{12\{1-3\lambda(1-\lambda)\} + f} \frac{EI}{L}$$

$$R_2 = \frac{4\{9(1-\lambda)^2 + f\}}{12\{1-3\lambda(1-\lambda)\} + f} \frac{EI}{L}$$

$$\gamma_{12} = \frac{18\lambda(1-\lambda) + f}{18\lambda^2 + 2f}$$

$$\gamma_{21} = \frac{18\lambda(1-\lambda) + f}{18(1-\lambda)^2 + 2f}$$

$$8.7. \quad R_1 = 2,917 \cdot 10^4 \text{ mt.}$$

$$R_2 = 3,267 \cdot 10^4 \text{ mt.}$$

$$\gamma_{12} = 0,400$$

$$\gamma_{21} = 0,357$$



$$8.8. \quad M_1^0 = -(R_1 + \gamma_{21} R_2) \frac{\Delta}{L}$$

$$M_2^0 = -(R_2 + \gamma_{12} R_1) \frac{\Delta}{L}$$

$$0 = R_1 \theta_1 + \gamma_{21} R_2 \theta_2$$

$$1 = R_2 \theta_2 + \gamma_{12} R_1 \theta_1$$

con lo que resulta

$$\gamma_{21} = \frac{1}{\frac{M_2^0}{M_1^0} (1 - \frac{\theta_2}{\theta_1}) - 1}$$

$$R_2 = \frac{1}{\theta_2 + \gamma_{21} \theta_1}$$

$$R_1 = \frac{\gamma_{21}}{\theta_2 + \gamma_{21} \theta_1} \frac{\theta_2}{\theta_1}$$

$$\gamma_{12} = - \frac{\theta_1}{\theta_2}$$

Las flexibilidades de la viga son:

$$f_{11} = \theta_1 ; \quad f_{21} = \theta_2 = f_{12} ; \quad f_{22} = \theta = -(\frac{M_1^0}{M_2^0} - 1) \theta_2 + \frac{M_1^0}{M_2^0} \theta_1$$

La luz de la viga es:

$$L = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 \theta - \theta_2^2} \frac{\Delta}{M_2^0}$$

$$8.9. \quad R_1 = R_2 = R = \frac{\rho_A + \rho_S}{2}$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma = \frac{\rho_A - \rho_S}{\rho_A + \rho_S}$$

con

$$\frac{1}{\rho_A} = \frac{1}{\rho_1 \rho_2 (1 - g_{12} g_{21})} \left\{ \rho_2 + \frac{l}{2L+l} \rho_1 g_{12} + \frac{l + g_{12} (2L+l)}{(2L+l)^2} \rho_1 l \right\}$$

$$\frac{1}{\rho_S} = \frac{\rho_1 + \rho_2 + 2\rho_1 g_{12}}{\rho_1 \rho_2 (1 - g_{12} g_{21})}$$

Aplicación:

$$R = 3486 \quad ; \quad \gamma = 0,328$$

$$8.10. \quad \frac{1}{R_S} = \int_0^{10} \frac{dx}{EI} = \frac{82,5}{E}$$

$$R_S = 2,909 \frac{EI_C}{L} = 2424 \text{ mt. con } I_C \text{ inercia en la sección central y } L = 20 \text{ m.}$$

Carga uniforme:

$$\theta_0 = \int_0^{10} q \frac{(20-x)x}{2} \frac{dx}{EI} = \frac{3355}{E} q$$

$$M^0 = R_s \theta_0 = 40,668 q = 1,220 \frac{qL^2}{12} = 81,34 \text{ mt.}$$

8.11. Ver los esfuerzos en la figura 8.35.

La flecha es:

$$v_2 = v_{20} + \theta_3 \cdot L = 0,1066 + 0,7266 = 0,83 \text{ mm.}$$

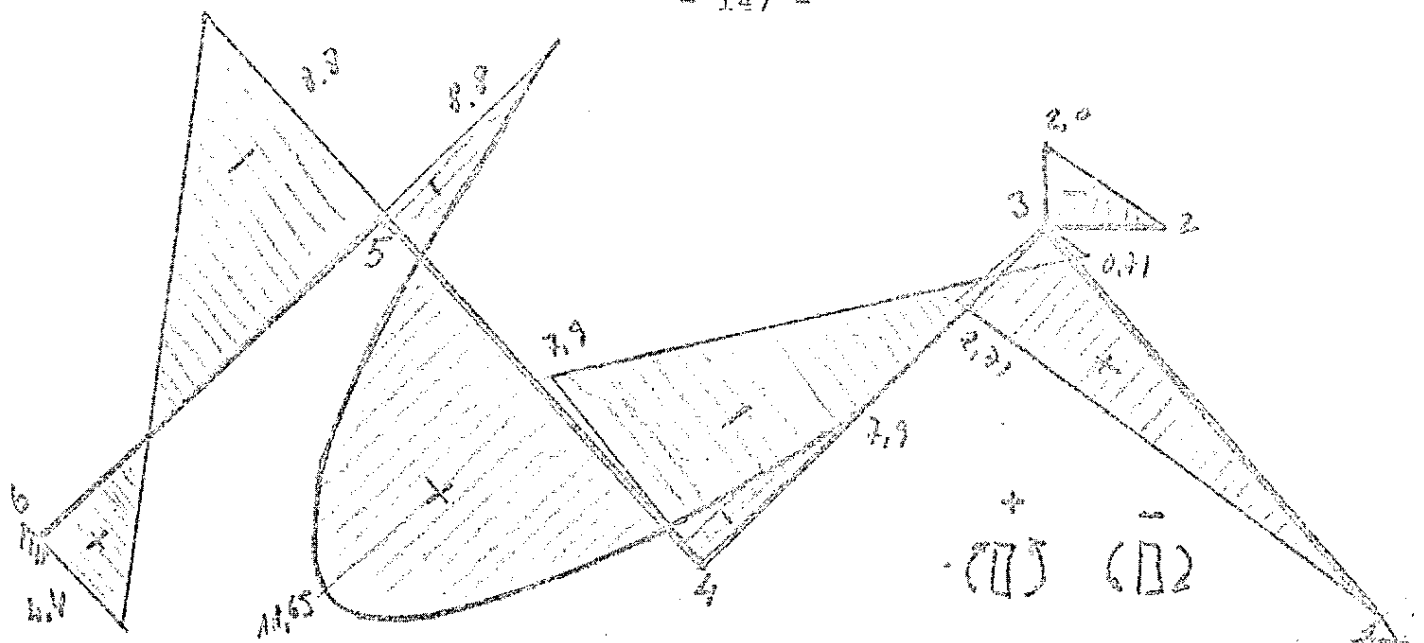
8.12. Estructura antimetrica. Los momentos finales del Cross son:

NUDO	2			5
BARRA	2-1	2-3	2-5	5-2
FINAL M	0,94	-5,88	4,94	6,44

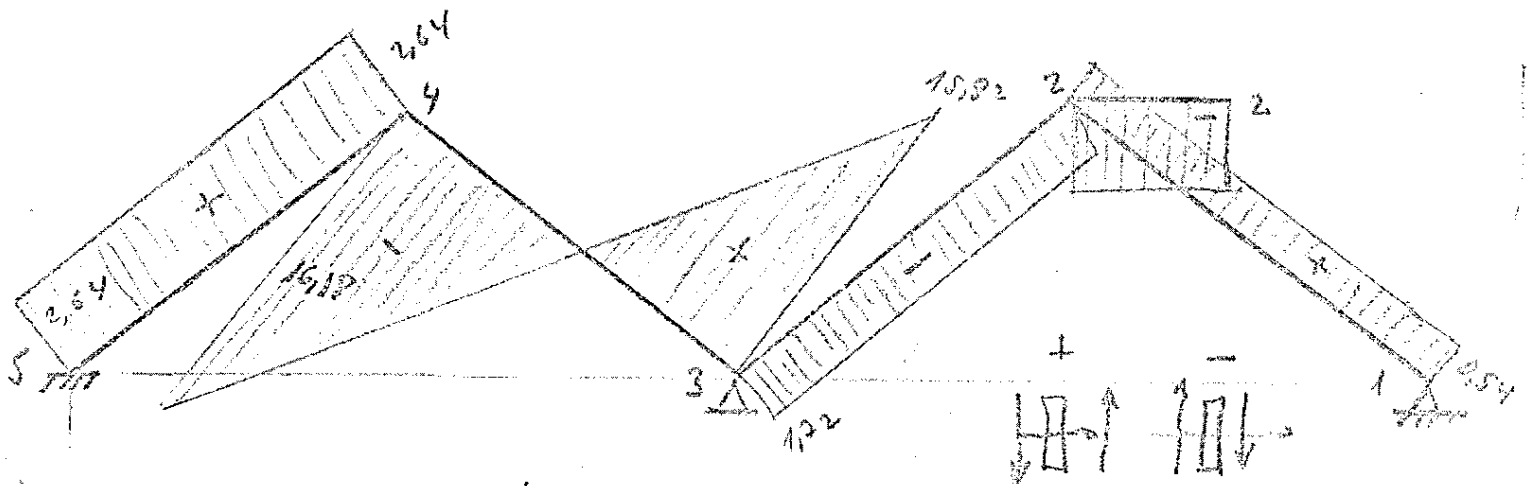
8.13. Los resultados del Cross son:

NUDO	1		2		3			4				5	
BARRA	1-2	1-3	2-1	2-4	3-1	3-4	3-6	4-2	4-3	4-5	4-7	5-4	5-8
M	1,29	-1,29	0,35	-0,35	3,15	-0,23	-2,92	-0,11	-0,04	0,07	0,08	0,01	-0,0

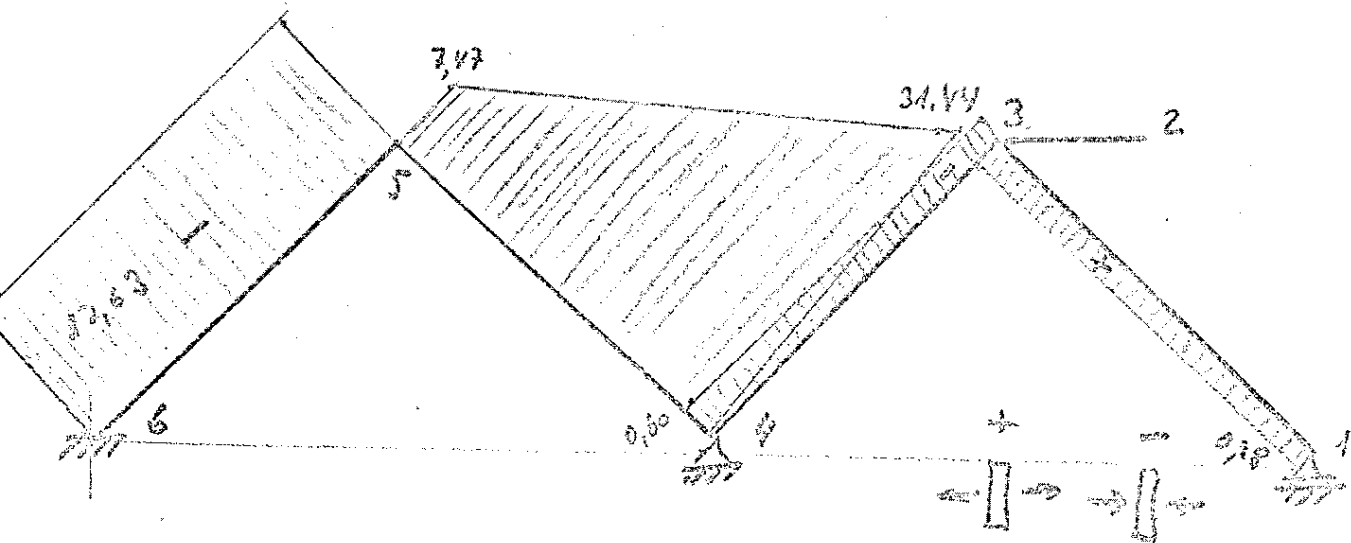
$$M_{6-3} = 2,55 \quad ; \quad M_{7-4} = 0,04 \quad y \quad M_{8-5} = 0$$



Ley de momentos flexores.



Ley de esfuerzos cortantes



Ley de esfuerzos axiales.

Figura 8.36. Solución del ejercicio 8.11.

8.14. Estructura simetrica.

$$I_1 = \frac{1}{12} c_1^3 b \quad I_2 = \frac{1}{12} c_2^3 b = 8I_1$$

$$R_{21}^{ea} = \frac{24EI_1}{a} \frac{1}{1+7(1-\lambda)^3} = R_1$$

$$R_{sim} = R_{23} = \frac{8EI_1}{a} \frac{1}{8-7\lambda} = R_2$$

$$M_{23}^0 = pa \frac{\lambda(16-15\lambda)}{2(8-7\lambda)}$$

$$M_{23} = M_{20}^0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = M$$

$$\text{Flecha isostatica } v_A^0 = \frac{p a^3 \lambda}{24EI_1} (12-11\lambda^2)$$

$$\text{Flecha hiperestatica } v_A^1 = \frac{M}{16EI_1} (8-7\lambda^2)$$

$$\text{Flecha final } v_A = v_A^0 + v_A^1 = 0,0866 \text{ m.}$$

8.15.  $M = 1,203 \text{ mt.}$

$Q = 0$

$N = 0,0045 \text{ t.}$

8.18. Los esfuerzos son leyes lineales a lo largo de cada barra con los valores en sus extremos expresados en la tabla:

NUDO	1		2		3			
BARRA	1-5	1-2	2-1	2-3	2-6	3-2	3-4	3-7
(mt) M	-1,62	-1,62	0,52	-0,04	-0,55	0,02	0,02	0
(t) Q	0,37	-0,36	-0,36	-0,01	0,06	-0,01	0,003	0
(t) N	-0,36	-0,73	-0,73	-0,73	0,35	-0,73	-0,79	0,01

NUDO	4		5	6	7	8
BARRA	4-3	4-8	5-1	6-2	7-3	8-4
(mt) M	0	0	2,73	0	0	0
(t) Q	0,003	0	0,73	0,06	0	0
(t) N	-0,79	0,003	-0,36	0,35	0,01	0,003

Sentido de avance izquierda-derecha, abajo-arriba.

## METODO DE CROSS. ESTRUCTURA TRASLACIONAL

### 9.1. DEFINICIONES

Se ha visto en el capítulo 7 que las estructuras intraslacionales se caracterizan por ser capaces de resistir las fuerzas exteriores (\*) mediante deformaciones producidas únicamente por los giros en los nudos (\*), sin necesidad de que se desplacen. Estos giros permiten siempre, como se ha expuesto en el desarrollo del método de Cross, alcanzar el equilibrio de momentos alrededor de cada nudo y en cada barra. Sin embargo, los restantes esfuerzos, cortantes y axiles, aparecen y equilibran las fuerzas exteriores si existe suficiente número,  $C_1$ , de coacciones exteriores (ecuaciones 7.7, 7.8 y 7.9), adecuadamente dispuestas. En caso contrario, la estructura precisa que sus nudos se desplacen con objeto de modificar los esfuerzos- momentos flectores, cortantes y axiles- de modo que equilibren a las fuerzas exteriores, en los nudos y barras de la estructura.

Una estructura traslacional se reconoce por el hecho de que al llevar a cabo un cálculo de Cross, como el indicado en los capítulos anteriores, y obtener las leyes de variación de momentos flectores y esfuerzos cortantes, no es posible deducir, en general para una carga arbitraria, unos esfuerzos axiles que equilibran todos sus nudos y barras. Esto significa que la estructura considera

---

NOTA(\*): Conviene recordar que en el caso de movimientos y deformaciones impuestas, los nudos pueden sufrir desplazamientos o traslaciones que corresponden a los valores iniciales - introducidos, sin que implique que la estructura sea traslacional, ya que ésta resiste la acción sin necesidad de que sus nudos precisen traslaciones adicionales. Ver apartado 8.5.

da como articulada constituye un mecanismo, con un número  $\alpha$  de grados de movimientos o libertad, que no puede soportar un sistema general de fuerzas -las exteriores y los esfuerzos cortantes- mediante axiles. Alternativamente, este hecho implica que es posible encontrar en la estructura traslacional, supuesta articulada en sus nudos, una base de  $\alpha$  modos de movimientos de sus nudos, sin que las barras sufran deformaciones axiles, o sea, modifiquen sus longitudes.

Se puede definir un estado paramétrico mediante un vector cuyos elementos son las componentes ordenadas de los desplazamientos de los nudos. El grado de traslacionalidad  $\alpha$  representa la dimensión de este conjunto vectorial. La base de  $\alpha$  vectores supone que son linealmente independientes y cualquier posible estado paramétrico puede expresarse como combinación lineal de los estados paramétricos de la base.

Conviene recordar aquí que se supone siguen siendo válidas las hipótesis del cálculo lineal y de la elongabilidad de las barras es nula ( $\frac{L}{E\Omega} = 0$ ), expuestas en un capítulo anterior. En particular, se admite que las deformaciones son funciones lineales de los movimientos, es decir, sus cuadrados son despreciables en comparación con la unidad (\*).

Se denomina grado de traslacionalidad de una estructura al número máximo  $\alpha$  de estados paramétricos o distintos modos linealmente independientes de traslación de sus nudos que existen sin modificar las longitudes de las barras, suponiendo la estructura articulada. Este valor  $\alpha$  corresponde al orden del mecanismo o número mínimo de coacciones -internas (barras) o externas (apoyos)- preci-

---

NOTA(\*): Esta hipótesis supone por ejemplo que el ángulo  $\alpha$  de giro de una barra es tal que  $\text{sen } \alpha = \alpha$  y  $\text{cos } \alpha = 1$ .



sas para convertir la estructura articulada en isóstatica . Matemáticamente, este número  $\alpha$ , salvo estructuras con geometrias críticas, viene dado por la fórmula:

$$\alpha = E - I \quad (9.1)$$

en donde I y E representan el número de incógnitas y ecuaciones que aparecen en el equilibrio de fuerzas de la estructura, es decir, según las expresiones (7.7) y (7.8), se obtiene:

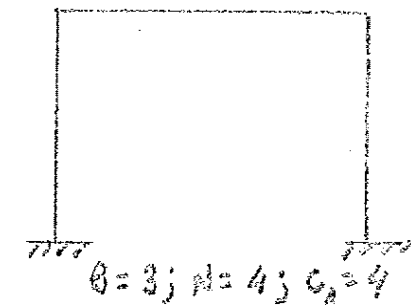
$$\alpha = (B + 2N) - (2B + C_1) = 2N - B - C_1 \quad (9.2)$$

con B, N y  $C_1$  respectivamente el número de barras, y coacciones existentes en la estructura supuesta articulada.

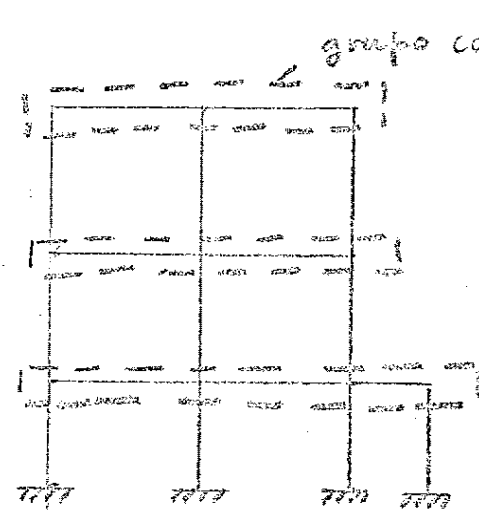
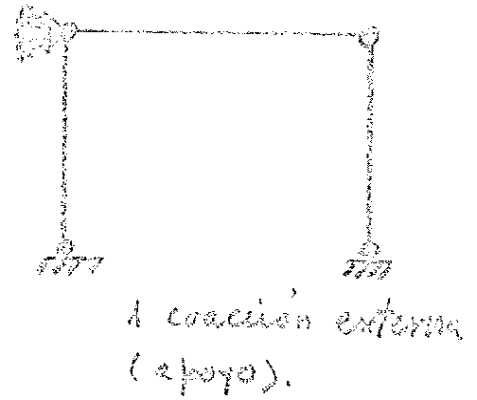
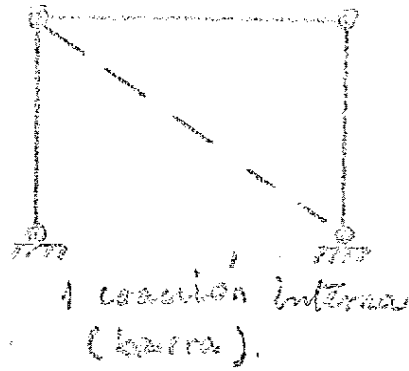
Las  $\alpha$  incógnitas extra precisas para satisfacer las  $\alpha$  condiciones representadas por la expresión (9.1) son los modos de movimiento o estados paramétricos de la estructura.

En el cálculo de una estructura traslacional, es fundamental determinar el grado de traslacionalidad  $\alpha$ , así como los  $\alpha$  estados paramétricos linealmente independientes. Con este objeto es importante introducir la idea de grupo cotraslacional de nudos, como un conjunto de nudos de la estructura que se desplazan cuando se produce un movimiento de traslación en uno de ellos, suponiendo que las barras no modifican su longitud.

Un modo práctico de obtener el grado de traslacionalidad de una estructura consiste en introducir un número adicional de barras de modo que los nudos no puedan desplazarse, es decir, que con las barras rígidas la estructura se convierta en un sólido rígido. Alternativamente, se puede imponer una serie de coacciones adicionales, en forma de apoyos exteriores, de modo que impidan todos

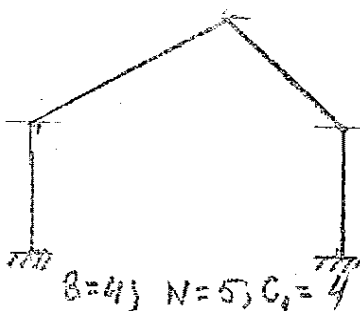
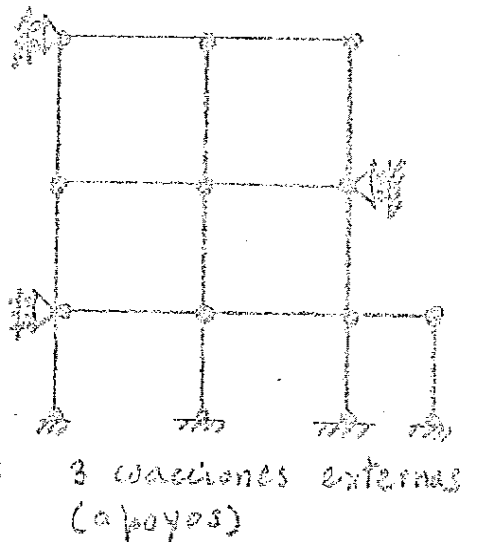
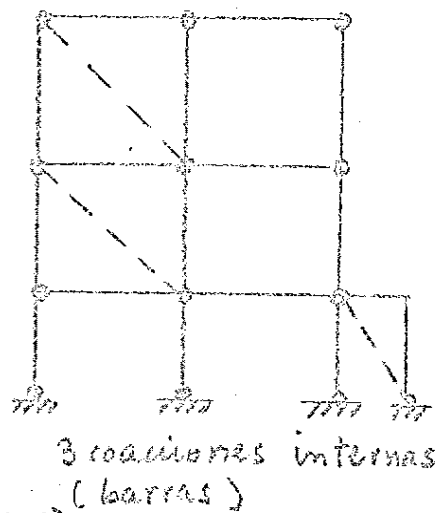


(a) Pórtico simple ( $\alpha=1$ ).

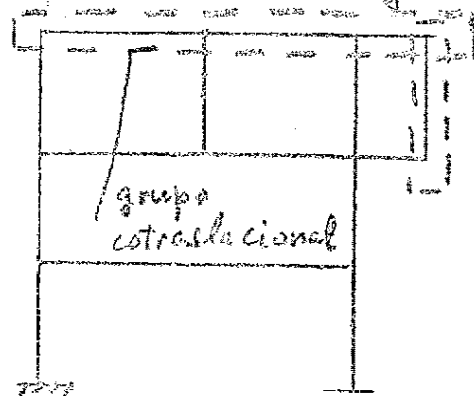
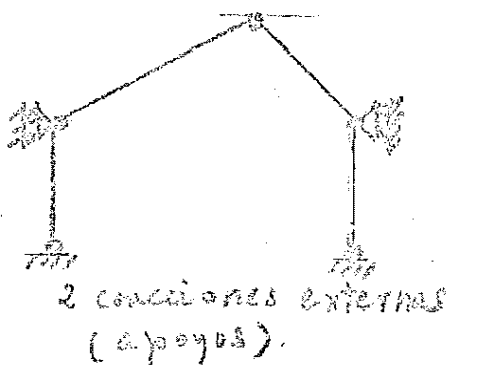
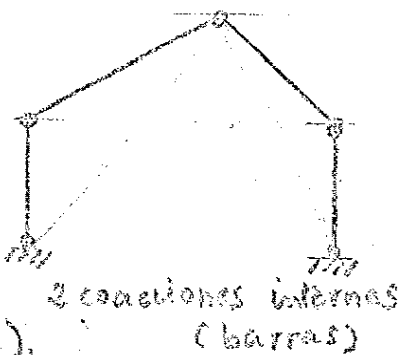


$B=17; N=14; C_1=8$

(b) Pórtico de edificación ( $\alpha=3$ ).



(c) Pórtico a dos aguas ( $\alpha=2$ ).



$B=15; N=12; C_1=4$

(d) Pórtico de edificación con pilares cortados ( $\alpha=5$ ).

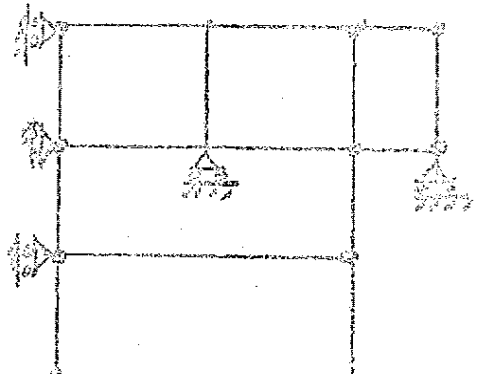
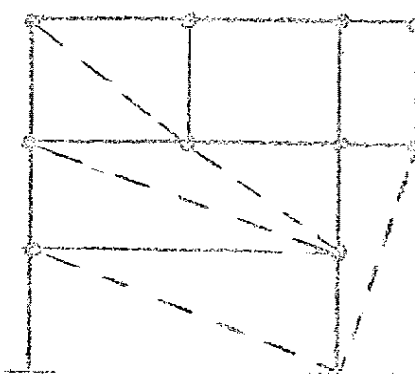


Figura 9.1. Grados de traslacionalidad.

los movimientos de los nudos. Es importante, en estos casos, descubrir en la estructura los conjuntos de nudos cotraslacionales, ya que impidiendo el movimiento de uno de sus nudos, todos los restantes permanecen sin desplazarse (figura 9.1). Los estados paramétricos linealmente independientes se pueden determinar una vez introducidas las coacciones exteriores o internas, o de ambos tipos a la vez liberando sucesivamente cada uno de ellos e imponiendo un movimiento arbitrario en la dirección eficaz de la coacción, que induce en todos los nudos del grupo cotraslacional los movimientos correspondientes. A estos efectos, los movimientos ligados de los restantes nudos del grupo cotraslacional se obtienen mediante un diagrama del tipo Williot (suponiendo deformación nula de las barras) o bien considerando la propiedad siguiente del movimiento de una barra rígida (sin deformación) (figura 9.2.):

Los desplazamientos de los extremos de una barra recta son tales que sus proyecciones sobre ella son iguales (\*). (Figura 9.3).

Esta forma de obtención de los sucesivos estados paramétricos asegura su independencia lineal, ya que en cada uno de ellos existe una componente del movimiento distinta de cero que es, sin embargo, nula en los restantes estados paramétricos.

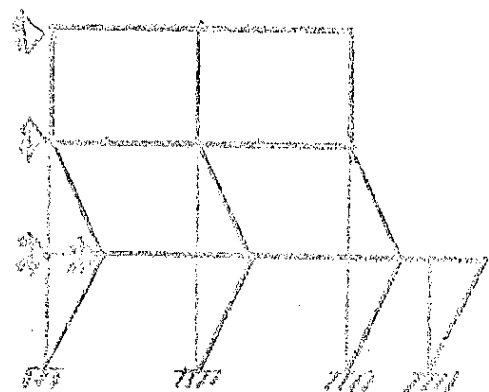
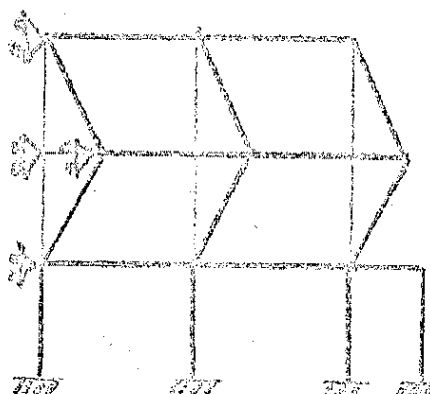
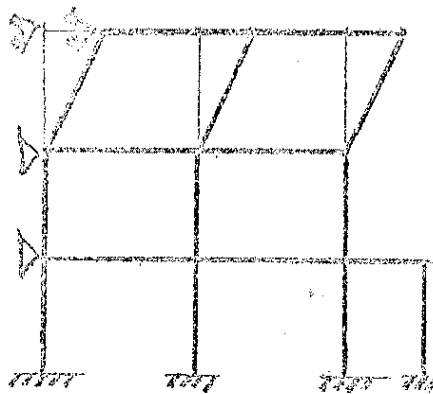
Se observa que si bien el número de coacciones que convierten una estructura en intraslacional -para cualquier estado de carga- está determinado, la disposición de estas coacciones en general no está unívocamente definida. Por consiguiente el conjunto de estados paramétricos

---

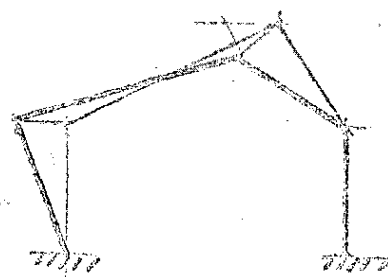
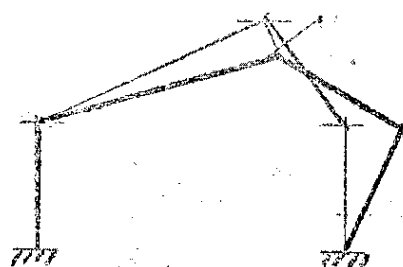
NOTA(\*): Esta propiedad es consecuencia del bien conocido teorema de la Cinemática Clásica, que expresa las velocidades (o movimientos infinitesimales) de un sólido rígido como un campo de momentos de un sistema vectorial.



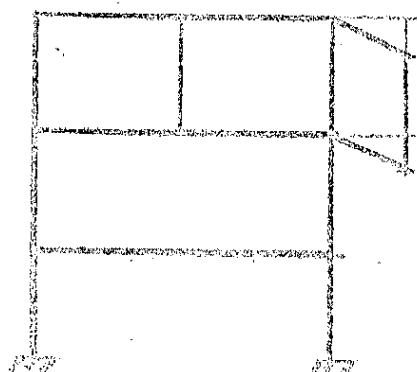
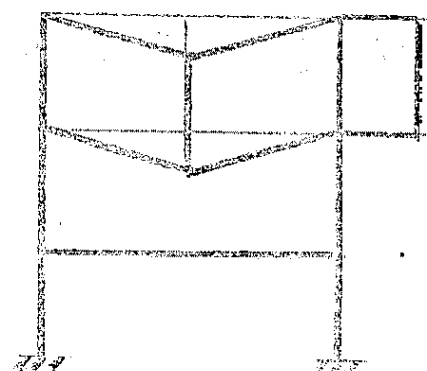
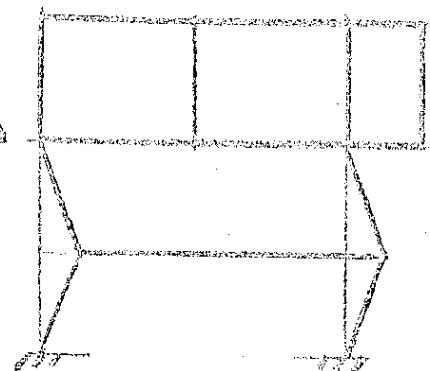
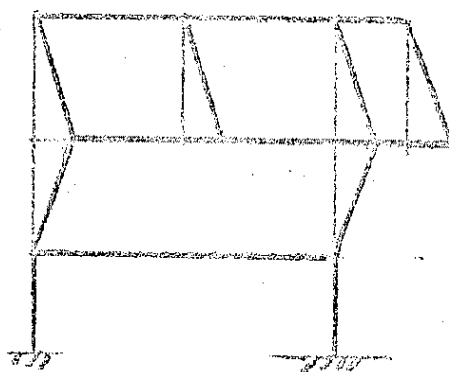
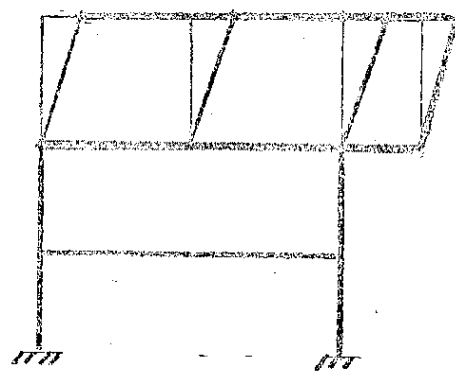
(a) Pórtico simple



(b) Pórtico de edificación.

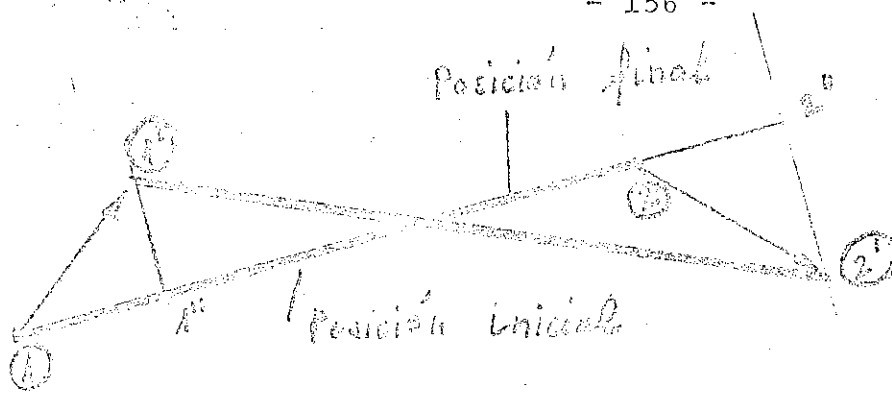


(c) Pórtico a dos aguas



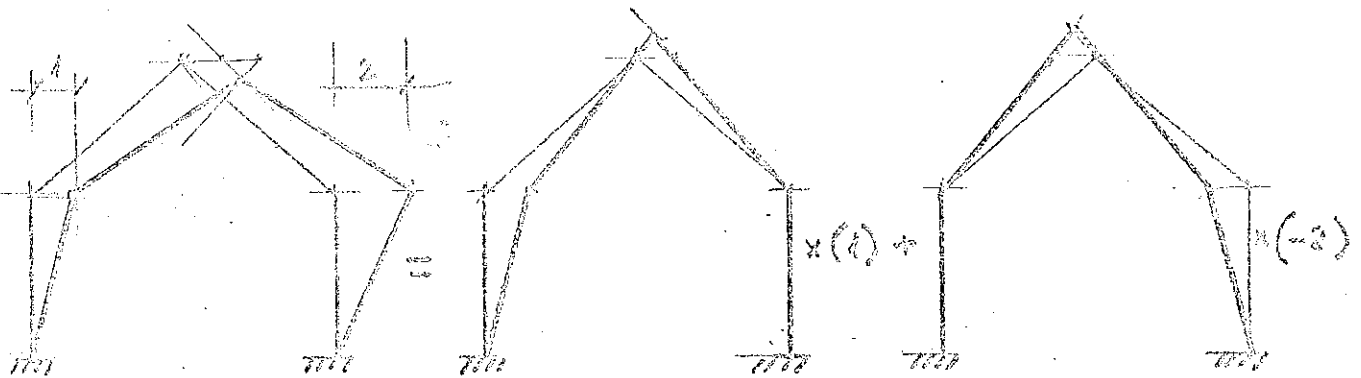
(d) Pórtico de edificación con pilares cortados

Figura 9.2. Estados paramétricos.



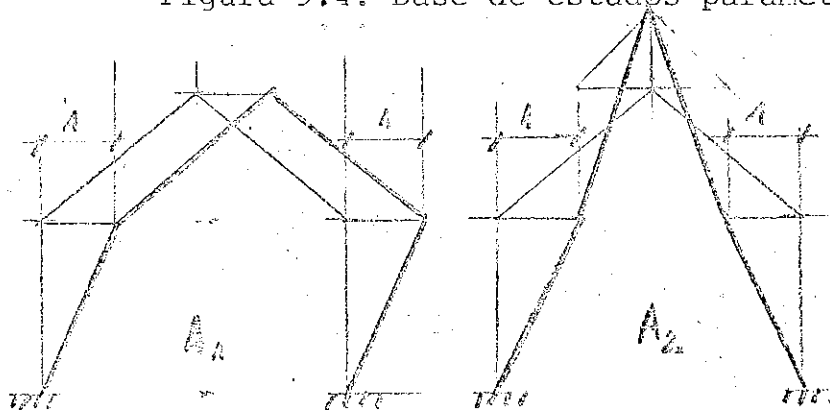
$$\Delta 1'' = 22''$$

Figura 9.3. Movimiento de una barra rígida.



$$\text{Estado paramétrico arbitrario} = (1) \times B_1 + (-2) \times B_2$$

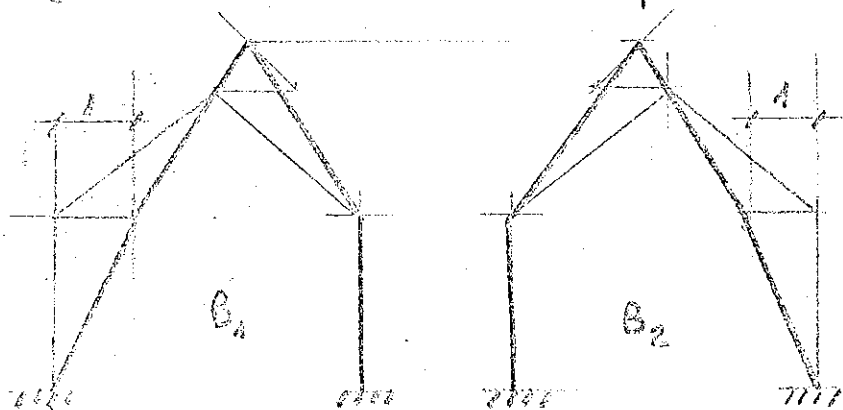
Figura 9.4. Base de estados paramétricos.



$$A_1 = B_1 + B_2$$

$$A_2 = B_1 - B_2$$

(a) Base A de estados paramétricos



$$B_1 = \frac{A_1 + A_2}{2}$$

$$B_2 = \frac{A_1 - A_2}{2}$$

(b) Base B de estados paramétricos

Figura 9.5. Transformación de bases de estados paramétricos.

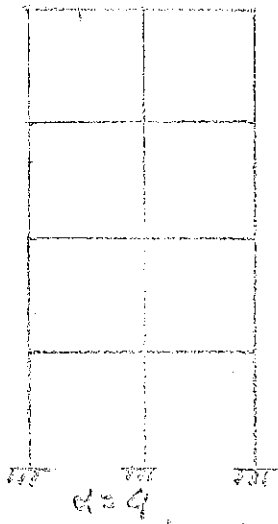
no es único, si bien considerados como un conjunto vectorial -con vectores con componentes los desplazamientos de los nudos-, cada uno de ellos constituye una base (figura 9.4). Se puede, mediante una transformación lineal, pasar de un estado paramétrico a otro (cambio de bases), lo que puede ser de interés en el cálculo, como se verá más adelante (figura 9.5).

Se observa, en el caso de la figura 9.5, que uno de los estados paramétricos, (A), no se deduce de liberar coacciones impuestas en los nudos; en cambio, el (B) corresponde a la liberalización de los apoyos introducidos en la figura 9.1. Sin embargo, la misma colocación de apoyos conduce a diferentes fases de estados paramétricos, como se indica en la figura 9.6, si se liberalizan simultáneamente varios de ellos, o bien, si se disponen de un modo diferente (figura 9.7).

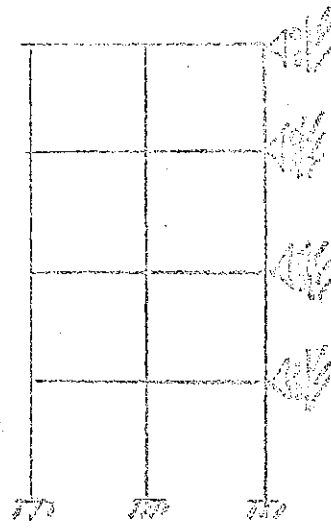
En cualquier caso, los apoyos deben de ser situados de modo que coaccionen movimientos, teniendo en cuenta el hecho de que las barras de la estructura son rígidas. Por ejemplo, la disposición de un apoyo en un nudo que coaccione el desplazamiento vertical, en una estructura pórtico de edificación normal, no debe realizarse, ya que no actúa el apoyo, por ser los soportes inelongables.

Por otra parte, es importante tener presente, en la deducción del grado de traslacionalidad de una estructura, la disposición geométrica y posibles simetrías de las coacciones de aquella (posiciones críticas), que pueden modificar el valor de  $\alpha$ . (Figura 9.8).

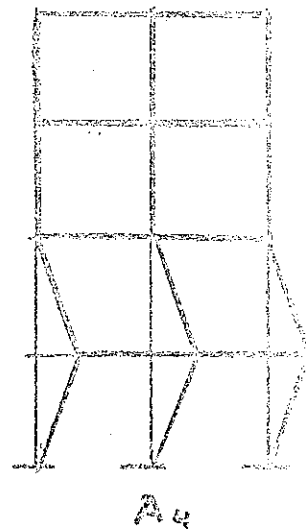
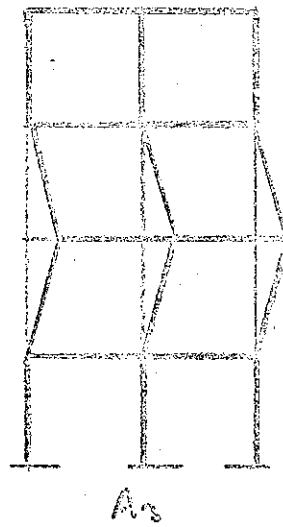
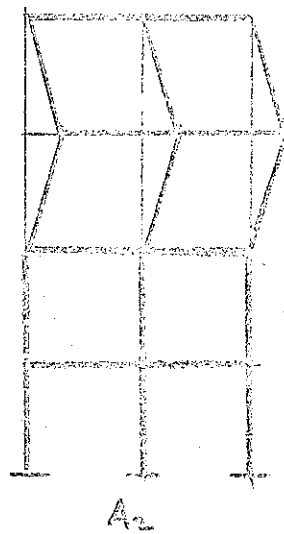
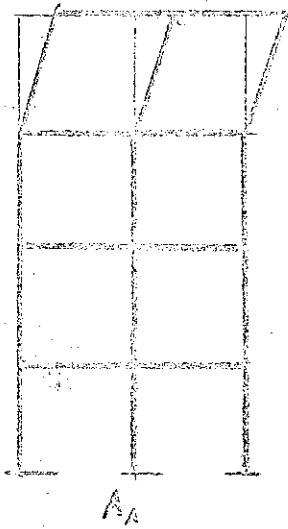
Problema distinto aparece en estructuras cuyo grado de traslacionalidad  $\alpha$  que constituye una característica propia estructural independiente de las cargas se reduce (en realidad al



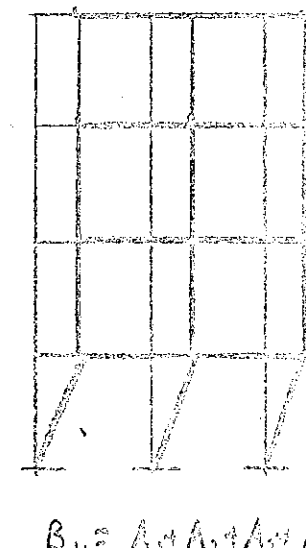
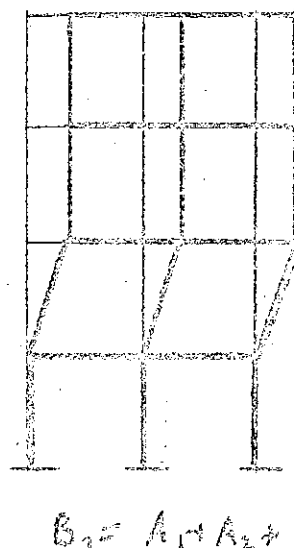
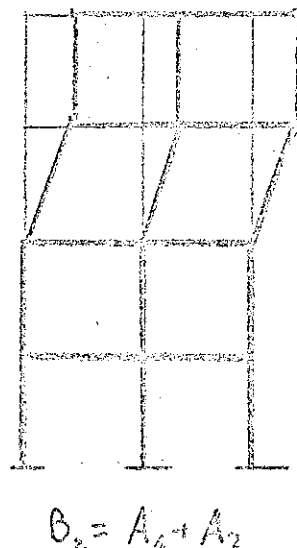
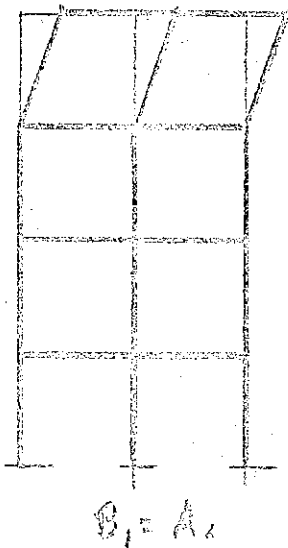
(a) Grado de translacionalidad



(b) Disposición de cargas



(c) Base A



(d) Base B

Figura 9.6. Bases distintas. Estructura edificación.

gunos estados paramétricos son inactivos) bajo ciertos tipos de acciones (simétricas, etc.). Así, la estructura pórtico simple (figura 9.2a), simétrica, bajo la acción de una carga simétrica, se convierte en intraslacional, y análogamente, el pórtico simétrico a dos aguas (figura 9.2c), bajo cargas simétricas, sólo presenta un modo de movimientos o estado paramétrico, simétrico al  $A_2$  de la figura 9.5.

Por último, conviene resaltar el carácter relativo de los conceptos de nudo y barra y, por lo tanto, del grado de traslacionalidad. Por ejemplo, es posible introducir en una estructura nudos intermedios en una barra y generar así varias barras. Este proceso modifica el grado de traslacionalidad, ya que ahora es preciso coartar el movimiento (flecha) de los nudos intermedios. Por ejemplo, la estructura pórtico simple de la figura 9.9 presenta un grado de traslacionalidad  $\alpha = 1$ ; sin embargo, si se considera que la barra 1-2 está constituida por dos, formadas por las barras 1-5 y 5-2, el grado de traslacionalidad se incrementa a  $\alpha = 2$ . Esta posibilidad de introducción de nudos adicionales intermedios en una barra puede, a veces, ser conveniente; por ejemplo, si la barra presenta una variación longitudinal de la inercia de la forma que se indica en la figura 9.3c. En ese caso, se presentan dos posibilidades de cálculo de la estructura:

a) Obtener las rigideces y coeficientes de transmisión, así como los momentos de empotramiento rígido, de la barra de sección variable, 1-2, y calcular la estructura con cuatro nudos y tres barras, con un grado de traslacionalidad  $\alpha = 1$ .

b) Considerar un nudo extra, 5, con lo que todas las barras de la estructura son de sección constante, con la simplificación de cálculo que eso conlleva, y analizar la estructura de cuatro barras, cinco nudos y dos grados de traslacionalidad.

La elección de uno u otro método depende, en cada caso, de numerosos factores, que pueden complicar el cálculo y que se harán evidentes a lo largo de este capítulo.



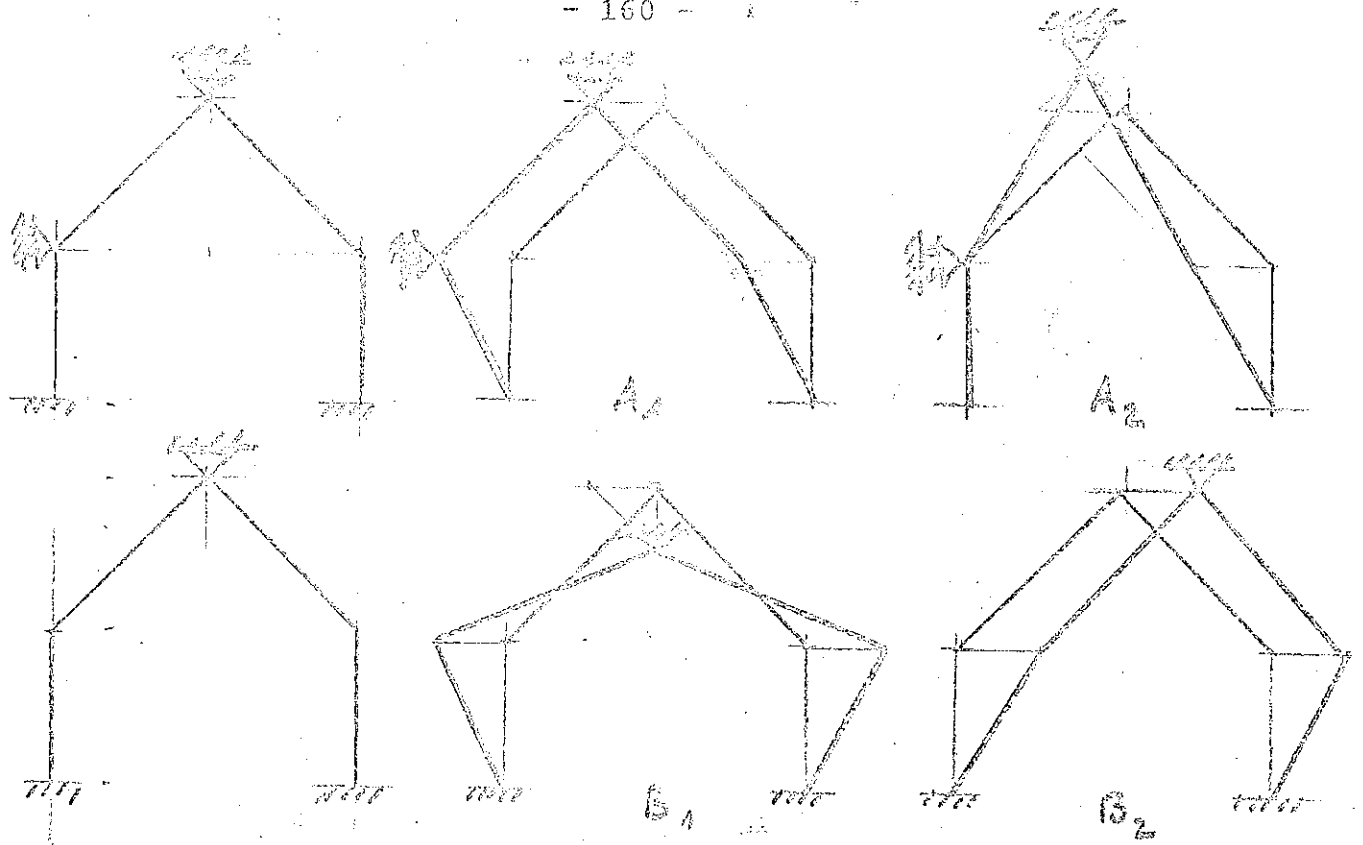


Figura 9.7. Bases distintas. Pórtico a dos aguas.

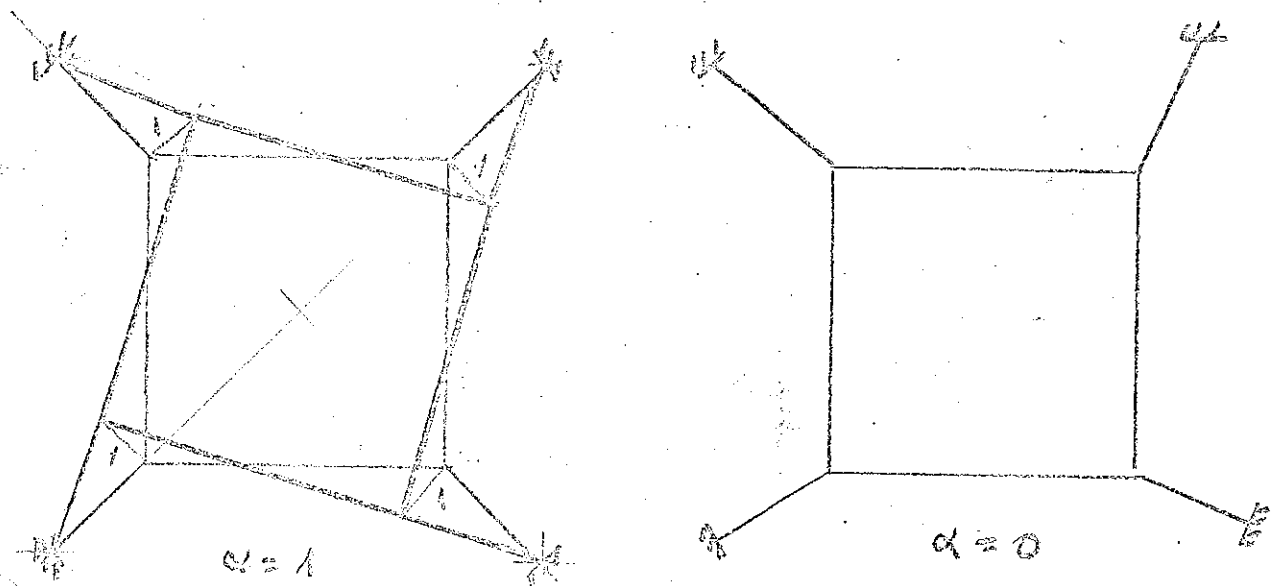


Figura 9.8. Grado de traslacionalidad. Disposición geométrica.

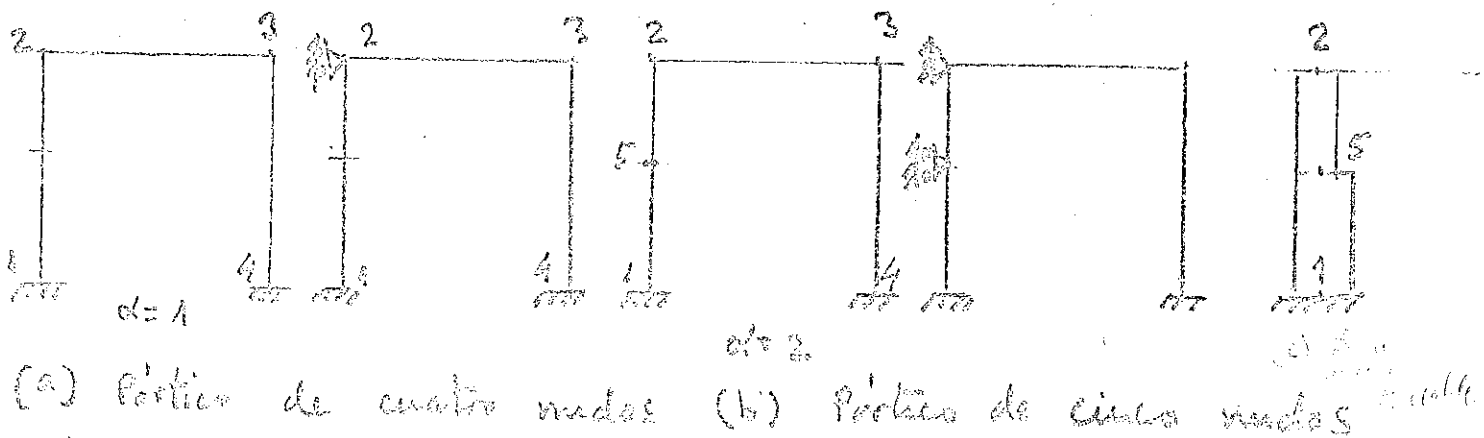


Figura 9.9. Dependencia del grado de traslacionalidad de la elección de los nudos.

## 9.2. CALCULO DE ESTRUCTURAS TRASLACIONALES

### 9.2.1. INTRODUCCION

A continuación se desarrolla el método indirecto de cálculo de estructuras traslacionales, que por su simplificada y relativamente escasa introducción de ideas nuevas en el método de Cross, resulta más adecuado y didáctico que exposición del método de Cross directo. Este permite alcanzar la respuesta de una estructura traslacional de un modo directo, mediante aproximaciones sucesivas que equilibra, en cada etapa, todos sus esfuerzos con las fuerzas exteriores. Este método de Cross directo, implica la introducción de los conceptos de rigidez de piso, que limitan su aplicación fundamentalmente a estructuras de edificación sencillas; y, por otra parte, su mayor complejidad computacional y su lenta convergencia lo convierten en menos preferible que el método de Cross indirecto o de superposición de estados, que es más general y simple de cálculo. Por este motivo, sólo se expone aquí el método indirecto de Cálculo de Cross.

### 9.2.2. ETAPAS DEL CALCULO

En esencia, el análisis de una estructura traslacional se lleva a cabo mediante superposición de cálculos de estados de cargas aplicadas a estructuras intraslacionales. Los resultados finales suma de los obtenidos en cada uno de los estados intraslacionales, deben de satisfacer las  $\alpha$  condiciones de equilibrio de fuerzas, que implica el grado de traslacionalidad. El siguiente ejemplo sencillo sirve para exponer estas ideas del cálculo, y posteriormente se estará en condiciones de resumir las fases que conlleva el análisis de una estructura traslacional.

Ejemplo 9.1. Calcular la estructura pórtico simple de la figura 9.10.

La estructura es traslacional con un grado de traslacionalidad  $\alpha = 1$ . Se introduce provisionalmente un apoyo que la convierte en intraslacional y se supone que el estado final de la estructura es suma de un estado (0) intraslacional, en equilibrio con las acciones exteriores, y un estado (1) procedente de un movimiento incógnita correspondiente a la coacción coartada por el apoyo provisional (figura 9.11a). Este movimiento incógnita se determina con la condición de que el apoyo provisional ficticio tenga reacción final nula y, por lo tanto, puede considerarse inexistente. El cálculo de Cross de estos dos estados se resume en la tabla 9.1. Conviene observar que las acciones correspondientes al estado 2 son antisimétricas, por lo que pudo simplificarse el análisis con respecto al - llevado a cabo en la tabla 9.1, pero no se ha planteado de este modo con objeto de alcanzar una mayor claridad en la exposición.

La situación inicial del estado (1) corresponde a un estado paramétrico de la estructura traslacional, incluyendo los momentos de empotramiento rígido que impiden el giro de los extremos de las barras estos solo sufren desplazamientos relativos transversales. El cálculo de estos momentos iniciales ha sido expuesto en el apartado 8.5. Las deformadas iniciales y finales de los dos estados del cálculo se representan asimismo en la figura 9.11a. Para el estado (2) se ha supuesto un movimiento incógnita en el apoyo y el cálculo se efectúa considerando un desplazamiento unidad, y los resultados, multiplicándolos por el valor incógnita del movimiento.

Las leyes de esfuerzos -momentos flectores, cortantes y axiles- se deducen según el procedimiento expuesto en el capítulo 7 y se muestran en la figura 9.11b. En particular, del equilibrio - en los nudos se pueden obtener las reacciones  $R^{(0)}$  y  $R^{(1)}$  en el apoyo ficticio, para cada uno de los estados del cálculo.

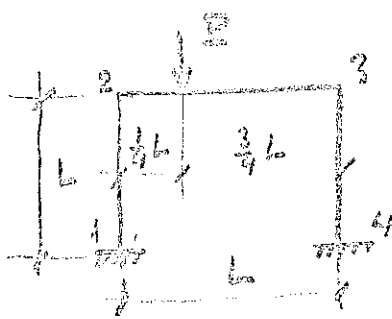
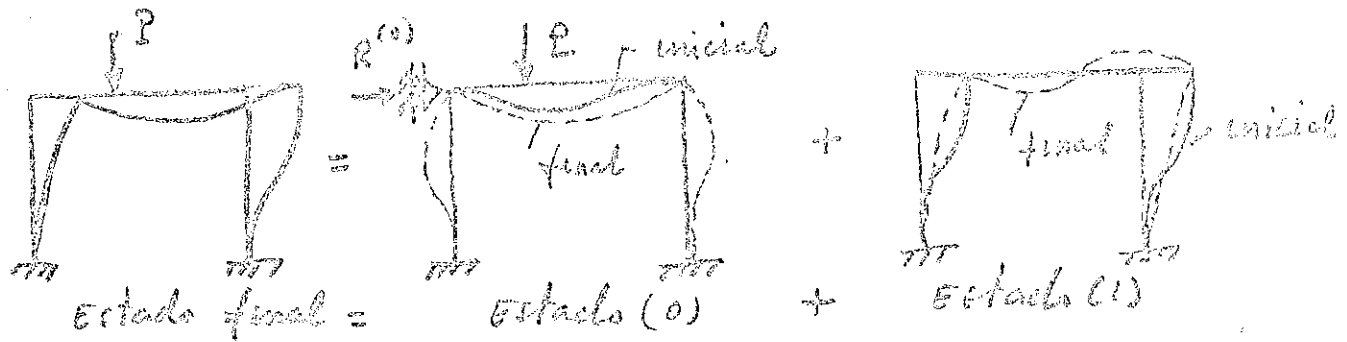
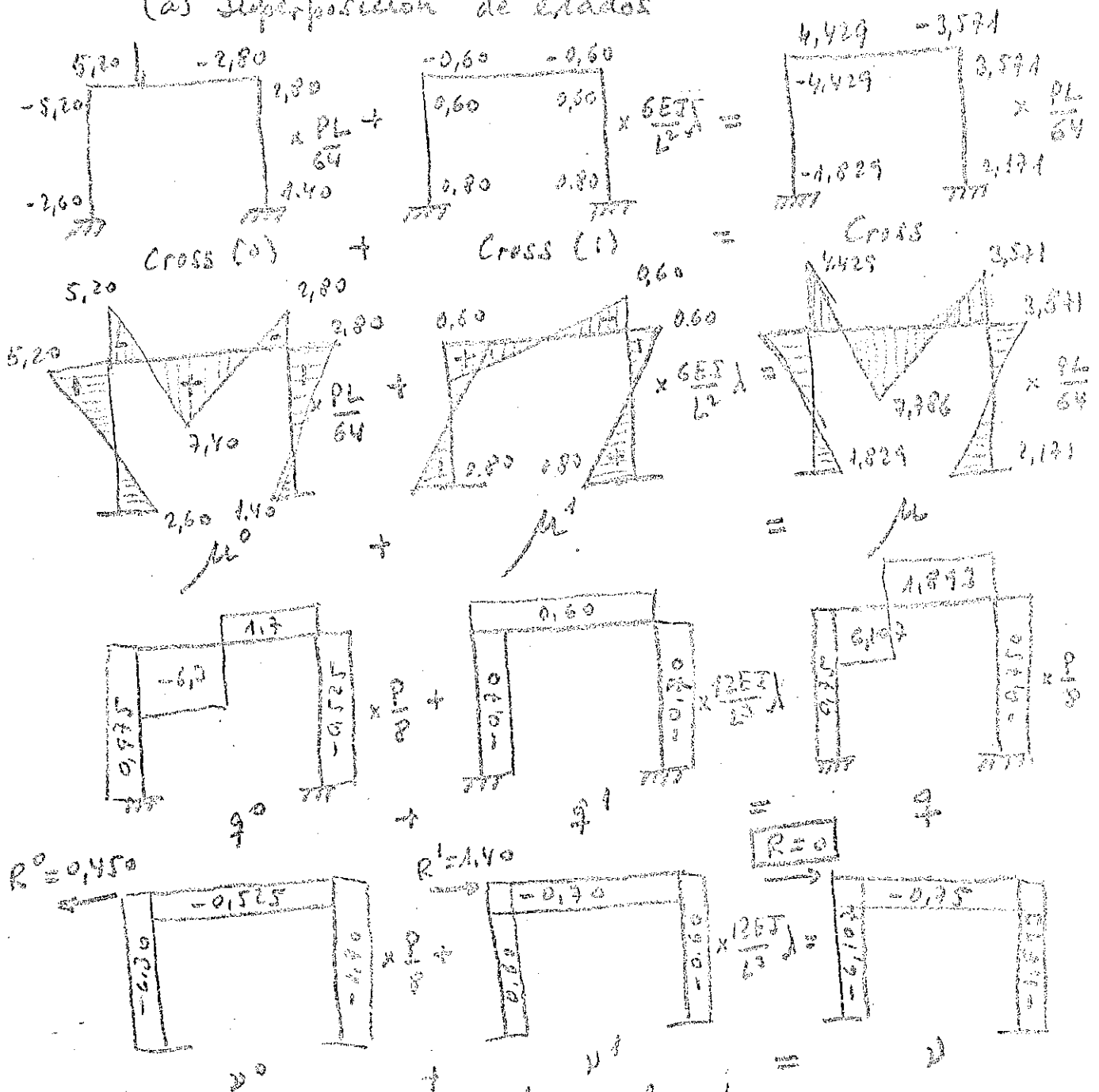


Figura 9.10. Estructura del ejemplo 9.1.



(a) Superposición de estados



(b) Resultados de Cross y leyes de Muevras.

Figura 9.11. Solución del ejemplo 9.1.

TABLA 9.1. Cálculo de Cross

NUDOS	2		3		Observaciones.
BARRAS	2-1	2-3	3-2	3-4	
R	$4EI/L$	$4EI/L$	$4EI/L$	$4EI/L$	
k	0,5	0,5	0,5	0,5	
$M^P$	0	9	-3	0	
$M^1$	-4,5	-4,5	1,5	1,5	
$M^2$	0	0,75	-2,25	0	
$M^3$	-0,375	-0,375	1,125	1,125	Estado (0) $\times \frac{PL}{64}$
$M^4$	0	0,562	-0,187	0	
$M^5$	-0,281	-0,281	0,093	0,093	
FINAL M	-5,20	5,20	-2,80	2,80	
$M^0$	1	0	0	1	
$M^1$	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	
$M^2$	0	-0,25	-0,25	0	Estado (1) $\times \frac{6EI}{L^2}$
$M^3$	0,125	0,125	0,125	0,125	
$M^4$	0	0,062	0	0,062	
$M^5$	-0,031	-0,031	-0,031	-0,031	
FINAL M	0,60	-0,60	-0,60	0,60	

La condición que permite calcular  $\lambda$  es, como se ha indicado, la siguiente:

$$R = R^{(0)} + \lambda R^{(1)} = 0$$

y los resultados finales se deducen por superposición de los dos estados (1) y (2). Estos resultados se representan en la misma figura 9.11.

Del método de cálculo anterior se pueden deducir varias consecuencias. En primer lugar, no es preciso imponer un movimiento unidad a los estados paramétricos, es decir, se pueden introducir, como solución inicial del estado (1), valores convenientes, proporcionales a los correspondientes a un movimiento unidad. En este caso pueden, por ejemplo, suponerse los siguientes momentos de empotramiento rígido.

$$M_1^0 = M_2^0 = -100X$$

en lugar de los relacionados con el movimiento unitario

$$M_1^0 = M_2^0 = - \frac{6EI}{L^2} \lambda \quad (9.1)$$

De esta forma, la incógnita  $X$  no constituye el movimiento incógnita  $\lambda$ , pero está relacionada con éste mediante la expresión:

$$\lambda = \frac{L^2}{6EI} 100X \quad (9.2)$$

Por otra parte, no es precisa la determinación de todas las leyes de esfuerzos de la estructura, y en particular la de axiles, para deducir el valor de la reacción final en el apoyo fic-

ticio. En efecto, según se indica en la figura 9,12, basta plantear el equilibrio de fuerzas horizontales en la parte de la estructura aislada (dintel) por la sección A-A. Se deducen así, las reacciones en cada estado:

$$R^{(0)} = -\left(-\frac{5,20+2,60}{L} + \frac{2,80+1,40}{L}\right) \frac{PL}{64} = \frac{3,60}{64} P \quad (9.3)$$

$$R^{(1)} = -\left(\frac{60+80}{L} + \frac{60+80}{L}\right) = -\frac{280}{L} \quad (9.4)$$

y por consiguiente

$$R = R^{(0)} + X R^{(1)} = 0 \quad (9.5)$$

es decir  $X = 1,286 \cdot 10^{-2} \frac{PL}{64} \quad (9.6)$

Los resultados del Cross se deducen directamente de la siguiente tabla 9.2, que constituye una continuación de la 9.1 anterior.

TABLA 9.2. Resultados finales del Cross traslacional

NUDOS	2		3		1	4	
BARRAS	2-1	2-3	3-2	3-4	1-2	4-3	
$M^{(0)}$	-5,20	5,20	-2,80	2,80	-2,60	1,40	$\frac{PL}{64}$
$M^{(1)}$	60	-60	-60	60	80	80	
$M=M^{(0)}+XM^{(1)}$	-4,429	-4,429	-3,571	3,571	-1,829	2,171	$\frac{PL}{64}$

Por último, conviene observar, que no es preciso obtener las reacciones  $R^{(0)}$  y  $R^{(1)}$  para el cálculo de la incógnita  $X$ , correspondiente al desplazamiento del dintel, puesto que es suficiente tener en cuenta el equilibrio de los esfuerzos en el estado final, - es decir, las  $\alpha$  condiciones extra de equilibrio que exige una estructura con grado de traslacionalidad  $\alpha$ , y que han sido comentadas en el apartado 9.1. Esta observación es importante, a veces, en estructuras con varios grados de libertad, porque reduce el esfuerzo de cálculo, como se verá más adelante, permitiendo, por otra parte, una mayor flexibilidad en el planteamiento de las ecuaciones que determinan las incógnitas en desplazamientos. En el ejemplo, la ecuación de equilibrio de esfuerzos, podría ser la correspondiente a la componente horizontal de las fuerzas que actúan sobre el dintel, supuesta cortada la estructura según la sección A-A (figura 9.12), es decir:

$$\Sigma Q + H = 0 \quad (9.7)$$

con  $H$  componente horizontal de las fuerzas exteriores de la estructura (en este caso  $H = 0$ ), y  $\Sigma Q$  suma de las fuerzas, componentes dorsales de los esfuerzos cortantes finales, cuyas expresiones son:

$$Q = Q^0 + XQ^1 \quad (9.8)$$

Por lo tanto, se obtiene la condición:

$$\frac{1}{L} \{ -(5,20+2,60) \frac{PL}{64} + (60+80)X \} + \frac{1}{L} \{ (2,80+1,40) \frac{PL}{64} + (60+80)X \} = 0$$

que conduce a idéntica ecuación a la (9.5), resultando la solución

$$X = 1,286 \cdot 10^{-2} \frac{PL}{64}$$



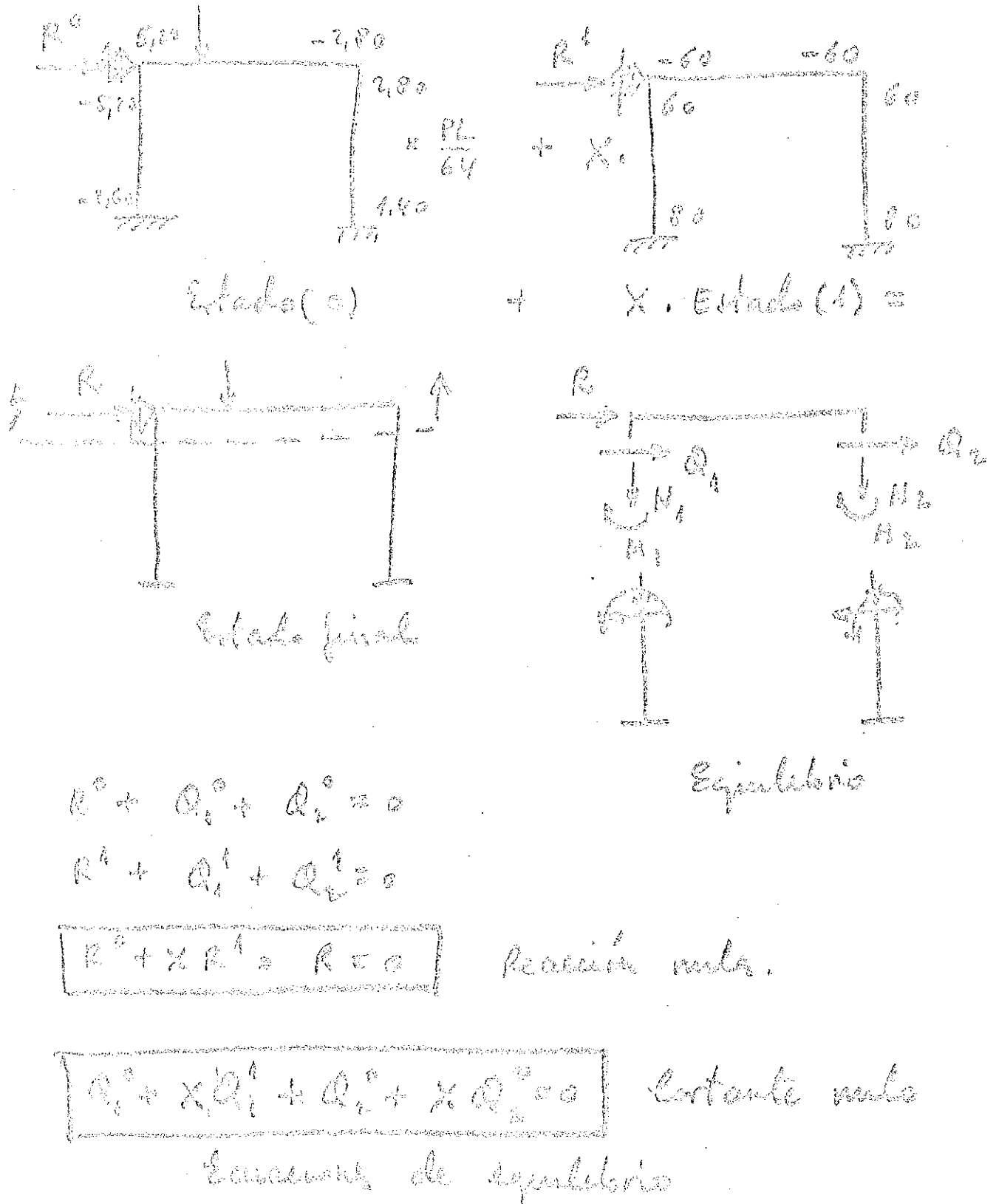


Figura 9.12. Establecimiento de las ecuaciones de equilibrio.

De los comentarios recogidos en el análisis de la estructura del ejemplo anterior, se deduce el siguiente procedimiento operativo de cálculo de una estructura traslacional, que se puede dividir en las siguientes etapas:

1) Determinación del grado de traslacionalidad  $\alpha$  y de los correspondientes  $\alpha$  estados paramétricos de la estructura correspondientes a una base. La forma de actuación en esta etapa ha sido comentada en detalle en el apartado 9.1. Un modo conveniente pero no único, de obtención del valor  $\alpha$  y de los  $\alpha$  estados paramétricos consiste en hacer intraslacional la estructura mediante la introducción de  $\alpha$  apoyos exteriores. A continuación aplicar sucesivamente movimientos unitarios (asientos) en cada uno de estos apoyos, deformándose la estructura (estado paramétrico) suponiendo que no existe modificación en las longitudes de las barras. A estos efectos, el concepto de grupo cotraslacional de nudos es de gran interés.

2) Realización de  $\alpha+1$  cálculos intraslacionales de Cross. El primero de ellos corresponde a la actuación de las cargas reales sobre la estructura supuesta intraslacional, y se designa aquí como estado de cargas (0). A veces, este estado de cargas (0) produce momentos nulos -no es preciso llevar a cabo el cálculo de Cross-, pero no así esfuerzos axiales, cuando las cargas están aplicadas en los nudos de la estructura. Los  $\alpha$  cálculos restantes de Cross corresponden a los estados paramétricos que se designan como estados de carga (a), con  $a = 1, 2, \dots, \alpha$ . Cada uno produce como solución inicial momentos no nulos de empotramiento rígido debidos al giro de las distintas barras, y que deben ser equilibrados en cada nudo mediante giros de éstas (solución modal). Conviene tener presente que a veces se pueden deducir unos estados de otros mediante simetrías y antimetrías. Por otra parte, se pueden considerar en el cálculo, como momentos de empotramiento rígido de la solución inicial, valores proporcionales a los debidos a un movimiento unidad del correspondiente estado paramétrico. En efecto, este cambio sólo modifica el coeficiente del

desplazamiento incógnita a determinar, por lo que el valor de éste resultará multiplicado por el valor inverso del factor de proporcionalidad considerado.

3) Planteamiento de  $\alpha$  ecuaciones de equilibrio de fuerzas. Para ello existen dos posibilidades: La primera, que presenta un carácter muy sistemático, estriba en obtener la reacción en cada uno de los apoyos ficticios introducidos para convertir la estructura en intraslacional. Esta reacción se calcula como suma de las reacciones que se producen en estos apoyos en cada una de los  $\alpha+1$  estados de carga. Así, se puede escribir:

$$R_i = R_i^{(0)} + \sum_{a=1}^{\alpha} X_a R_i^{(a)} = 0 \quad (a = 1, 2, \dots, \alpha; i = 1, 2, \dots, \alpha) \quad (9.9)$$

siendo  $R_i$ ,  $R_i^{(0)}$  y  $R_i^{(a)}$  las reacciones que se producen en la coacción  $i$  en los estados final, intraslacional (0) de cargas, y estado intraslacional (a) respectivamente (\*). Las  $X_a$  corresponden a las incógnitas del problema y representan los movimientos, o valores proporcionales, que definen el estado paramétrico (a).

Otra posibilidad consiste en no considerar la existencia de coacciones de apoyos, y plantear directamente que en la estructura final existen unos desplazamientos en los nudos definidos por un estado paramétrico  $E$ , que puede descomponerse en una combinación lineal de  $\alpha$  estados paramétricos básicos,  $E_a$ , es decir.

$$E = \sum_{a=1}^{\alpha} X_a E_a \quad (9.10)$$

NOTA(\*): Como se verá más adelante, en cálculo matricial de estructuras, los coeficientes  $R_i^{(a)}$  son los elementos  $(i,a)$  de la matriz de rigidez de la estructura, considerando los estados paramétricos como movimientos generalizados, es decir,  $R_i^{(a)}$  es la fuerza (reacción que aparece en el gdl  $i$  cuando se aplica un desplazamiento unidad en el gdl  $a$ , y los restantes están coaccionados. En este caso, las incógnitas  $X_a$  corresponden a los valores finales de estos movimientos en la estructura o coordenadas generalizadas del sistema básico de estados paramétricos.

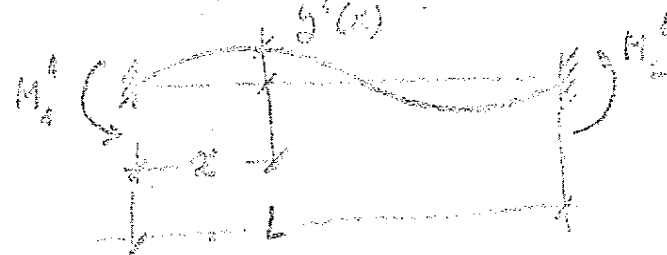
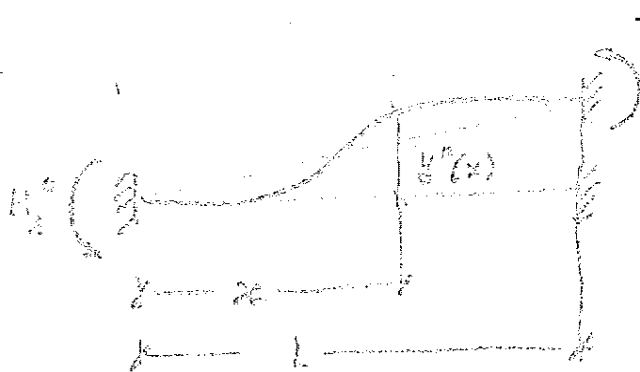
Los movimientos generalizados  $X_a$  se obtienen imponiendo las  $\alpha$  condiciones extra de equilibrio de fuerzas (no existen evidentemente reacciones ficticias nulas en este planteamiento). Esta posibilidad de cálculo es normalmente más cómoda y general que la anterior, que presenta la ventaja de su sistematización.

Una dificultad inherente a las dos posibilidades anteriores reside en la obtención de las  $\alpha$  ecuaciones de equilibrio de fuerzas, que permiten, bien calcular las reacciones, bien imponer la condición entre las incógnitas  $X_a$ . Es importante que en estas ecuaciones, que expresan equilibrio de fuerzas en una parte de la estructura, no intervengan los esfuerzos axiales, de cálculo, en general, más complicado que el de los cortantes, que se deducen de inmediato para cada barra aisladamente, en función de las cargas actuantes y los momentos en sus extremos. Para ello es preciso efectuar cortes convenientes en la estructura y plantear las ecuaciones de equilibrio, ya de momentos respecto a un punto determinado, ya de fuerzas proyectadas en una dirección, de modo que se admiten los términos de los esfuerzos axiales. Más adelante se muestran algunos ejemplos.

4) Resolución del sistema de  $\alpha$  ecuaciones de equilibrio. Este sistema presenta siempre solución, una vez que se haya supuesto una base de  $\alpha$  estados paramétricos y que las  $\alpha$  ecuaciones de equilibrio sean independientes entre sí. En el caso de que se impongan las condiciones de anulación de reacciones ficticias (ecuaciones 9.9), esta independencia lineal se alcanza siempre. Por el contrario, en el planteamiento directo de equilibrio de cortantes, las ecuaciones deben de ser cuidadosamente seleccionadas, de modo que una de ellas no sea consecuencia de las otras (\*). A este respecto, es conveniente -

---

NOTA(\*): Un error típico frecuente consiste en cortar todas las barras de una estructura concurrentes en un nudo y obtener los momentos de las fuerzas exteriores respecto al mismo. La contribución de los esfuerzos axiales es nula, pero esta ecuación de equilibrio se satisface automáticamente, ya que, en realidad, corresponde a un equilibrio de momentos respecto al nudo en cuestión.



$$y''(x) = \Delta \frac{x}{L} - x \int_0^L \frac{\mu''(u)}{EI(u)} \left(1 - \frac{u}{L}\right) du$$

$$- (L-x) \int_0^x \frac{\mu''(u)}{EI(u)} \frac{u}{L} du$$

$$y'(x) = -x \int_0^L \frac{\mu'(u)}{EI(u)} \left(1 - \frac{u}{L}\right) du$$

$$- (L-x) \int_0^x \frac{\mu'(u)}{EI(u)} \frac{u}{L} du$$

con  $\mu''(u) = -M_1'' \left(1 - \frac{u}{L}\right) + M_2'' \frac{u}{L}$

con  $\mu'(u) = -M_1' \left(1 - \frac{u}{L}\right) + M_2' \frac{u}{L}$

$$M_1'' = -(R_1 + Y_{11} R_2) \frac{\Delta}{L}$$

$$M_1' = M_1 - M_1''$$

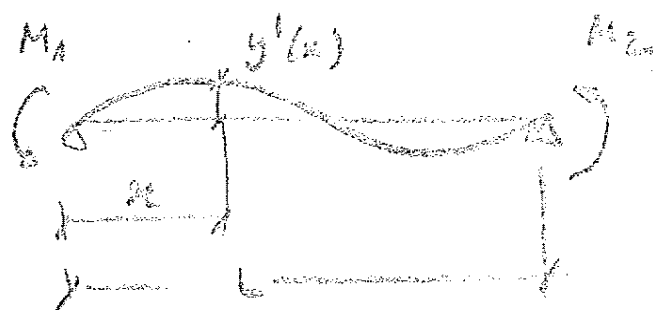
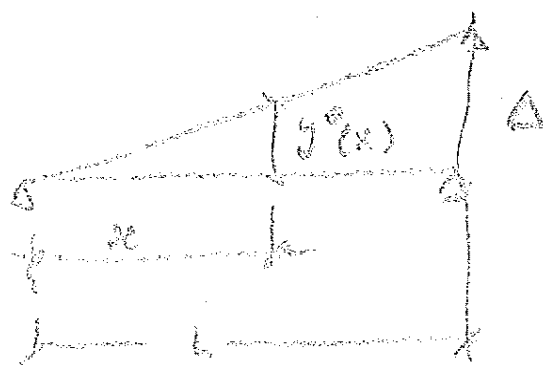
$$M_2'' = -(R_2 + Y_{22} R_1) \frac{\Delta}{L}$$

$$M_2' = M_2 - M_2''$$

Solución inicial

Solución modal

Solución inicial + solución modal = solución final



$$y''(x) = \Delta \frac{x}{L}$$

$$y'(x) = -x \int_0^L \frac{\mu'(u)}{EI(u)} \left(1 - \frac{u}{L}\right) du$$

$$- (L-x) \int_0^x \frac{\mu'(u)}{EI(u)} \frac{u}{L} du$$

con  $\mu(u) = -M_1 \left(1 - \frac{u}{L}\right) + M_2 \frac{u}{L}$

Solución estática

Solución hiperestática

Solución estática + Solución hiperestática = Solución final

aislar, mediante secciones, zonas de la estructura que contengan un conjunto cotraslacional de nudos y establecer la pertinente ecuación de equilibrio. No existen reglas generales, y en los ejemplos se ilustrará la forma de proceder.

5) Obtención del estado final como suma de los  $\alpha+1$  estados de cargas, es decir, el estado (0), de las acciones propias y los paramétricos multiplicados por los valores de las incógnitas obtenidas en la etapa anterior del cálculo. Los esfuerzos finales son suma de los esfuerzos deducidos en cada uno de los  $\alpha+1$  estados de cargas. Los desplazamientos en los nudos se calculan mediante la ecuación (9.10) y los movimientos totales en una sección genérica de la estructura son la suma de los movimientos finales en cada uno de los  $\alpha+1$  estados de carga. Conviene recordar que para cada estado paramétrico, como todo caso de acción con movimientos impuestos, los movimientos finales de una sección son la suma de las situaciones de empotramiento rígido (solución inicial) y la de giro en los nudos (solución modal), como se indica en la figura 9.13a. Sin embargo, frecuentemente, se obtienen los movimientos finales como combinación de un caso isostático de movimientos y otro hiperestático, con los momentos finales del Cross actuando en la barra simplemente apoyada (figura 9.13b). Estas consideraciones son asimismo aplicables a los giros en los nudos de la estructura y en las distintas secciones de una barra.

Ejemplo 9.2. En la estructura de la figura 9.14, calcular las leyes de esfuerzos en todas las barras y los desplazamientos en todos los nudos. Todas las barras son iguales y de sección constante, con las siguientes características:

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}.$$

$$I = 0,01 \text{ m}^4.$$

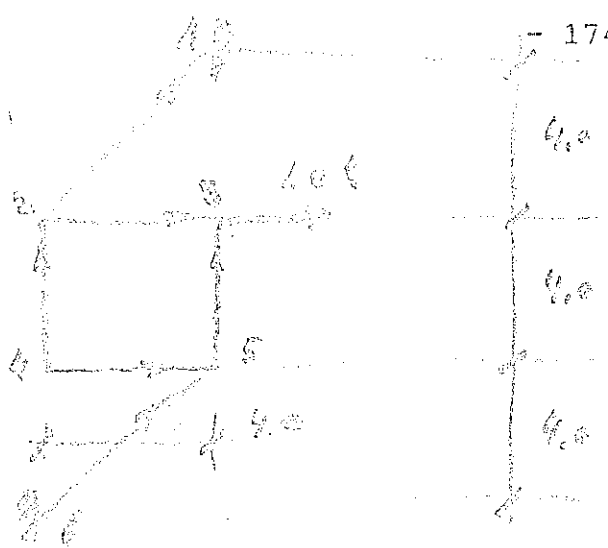
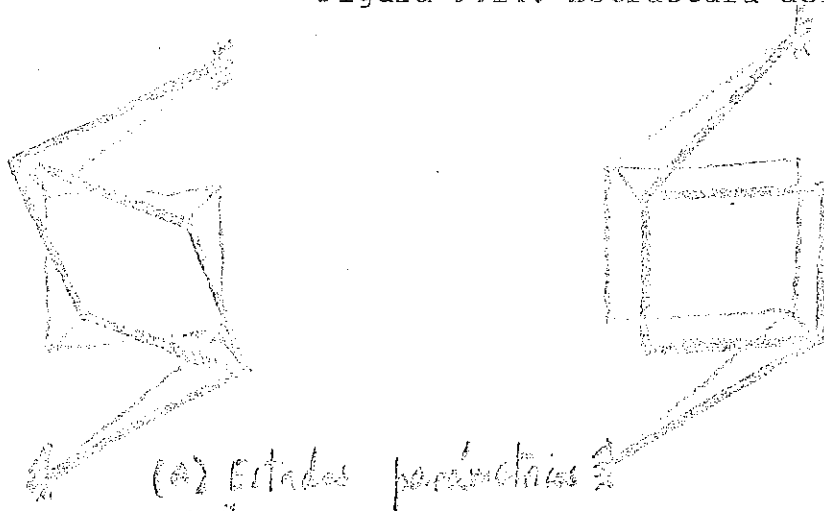
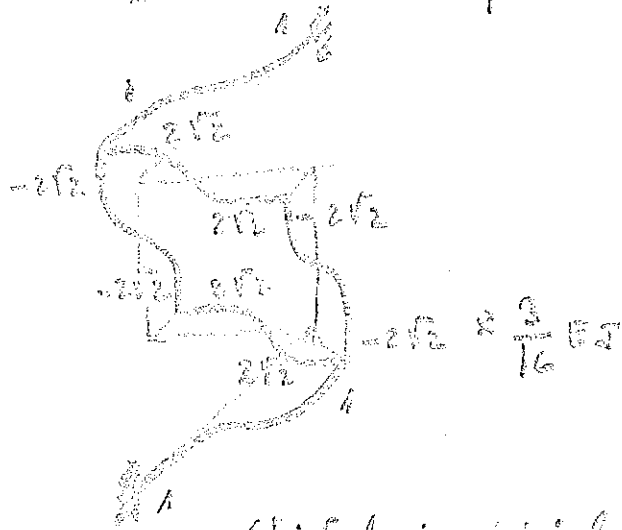


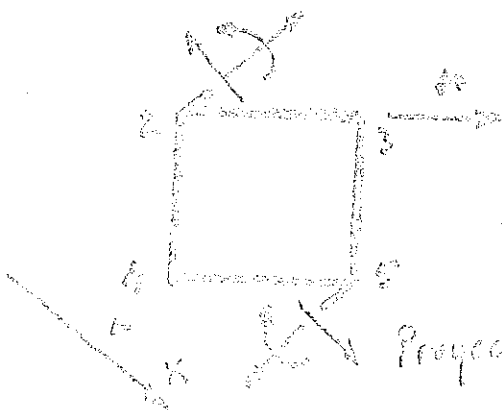
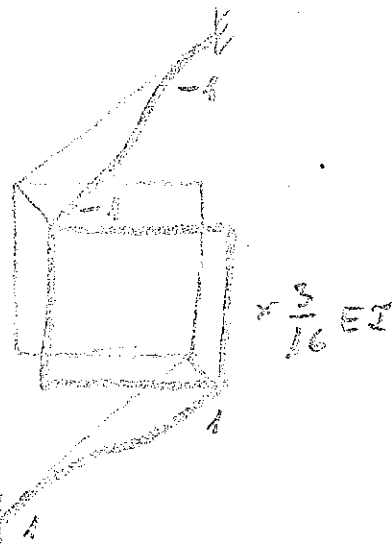
Figura 9.14. Estructura del ejemplo 9.2.



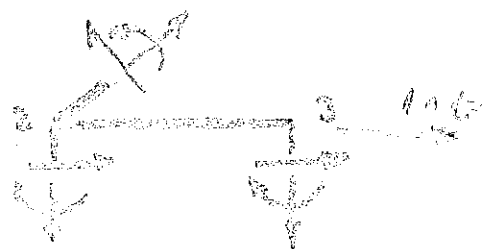
(a) Estados parciales



(b) Solución inicial



Proyección sobre  $\bar{x}$



Proyección horizontal

(c) Ecuaciones de equilibrio de fuerzas

Figura 9.15. Solución del ejemplo 9.2.

La estructura, con los 6 nudos numerados en la figura, tiene un grado de traslacionalidad  $\alpha = 2$ . Los estados paramétricos se representan en la figura 9.15a, así como los momentos que aparecen en los extremos de las barras en la situación inicial o de empostramiento rígido para cada uno de ellos (figura 9.15b).

En el estado (0) de actuación de las cargas propias sobre la estructura, supuesta intraslacional los momentos son nulos y no es preciso, por lo tanto, llevar a cabo un cálculo de Cross, ya que existe únicamente una fuerza aplicada en el nudo de la estructura. Esta fuerza se transmite a los apoyos de la estructura mediante esfuerzos axiales pero no de flexión.

En el cálculo de Cross del estado (1) se observa que los momentos en desequilibrio en cada nudo son iguales; luego, el cálculo es antimétrico y puede efectuarse la simplificación correspondiente, que recoge las siguiente tabla 9.3.

TABLA 9.3. Cálculo de Cross antimétrico. ( $E_1$ ).

NUDO	5			
BARRA	5-3	5-4	5-6	
R	$\frac{3}{4}EI$	$\frac{3}{4}EI$	$\frac{2}{2}EI$	
k	0,3398	0,3398	0,3204	
$M^0$	-0,5303	0,5303	0,1875	$\times EI$
$M^1$	-0,0637	-0,0637	-0,0601	$\times EI$
M	-0,5940	0,4666	0,1274	$\times EI$

Los valores finales se deducen de las condiciones de simetría obteniéndose los resultados de la tabla 9.4.



TABLA 9.4. Resultados finales del Cross. ( $E_1$ )

PAPRA	5-3	5-4	5-6	1-2	3-5	4-5
BARRA	2-4	2-3	2-1	6-5	4-2	3-2
$M^{(1)}$	-0,5940	0,4666	0,1274	0,1575	-0,5305	0,5303

Análogamente, para el estado paramétrico 2, se observa que corresponde a una situación simétrica, por lo que puede simplificarse el Cross, como se indica en la tabla 9.5.

TABLA 9.5. Cálculo de Cross simétrico. ( $F_2$ ).

NUDO	5		
BARRA	5-3	5-4	5-6
R	EI	EI	$\frac{\sqrt{2}}{2}EI$
k	0,3694	0,3694	0,2612
$M^0$	-	-	0,1875
$M^1$	-0,0693	-0,0693	-0,0490
M	-0,0693	-0,0693	0,1385

Los resultados finales se obtienen de las condiciones de simetría, llegándose de este modo a la tabla 9.6.

TABLA 9.6. Resultados finales del Cross. ( $E_2$ ).

BARRA	5-3	5-4	5-6	1-2	3-5	4-5
$M^{(2)}$	-0,0693	-0,0693	0,1385	-0,1630	-0,0346	-0,0346
BARRA	2-4	2-3	2-1	6-5	4-2	3-2
$M^{(2)}$	0,0693	0,0693	-0,1385	0,1630	0,0346	0,0346

Los momentos totales son por lo tanto, para una barra  $ij$ :

$$M_{ij} = M_{ij}^{(0)} + \lambda_1 M_{ij}^{(1)} + \lambda_2 M_{ij}^{(2)} = \lambda_1 M_{ij}^{(1)} + \lambda_2 M_{ij}^{(2)} \quad (9.11)$$

Dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas, necesarias para calcular las incógnitas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , se muestran en la figura 9.15(c). En la primera se proyectan las fuerzas sobre la dirección  $r$ , normal a las barras 2-1 y 5-6, y considerando el convenio usual de signos de esfuerzos, con los sentidos de avance presentados en la figura 9.14, se obtiene:

$$\frac{10\sqrt{2}}{2} + Q_{56} + Q_{21} = 0 \quad (9.12)$$

La segunda ecuación corresponde al equilibrio de fuerzas según la proyección horizontal, y se escribe:

$$10 + Q_{24} + Q_{35} - Q_{21} \frac{\sqrt{2}}{2} + N_{21} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad (9.13)$$

Se observa que en esta última ecuación (9.13) aparece el valor desconocido de un axil ( $N_{21}$ ), por lo que es preciso recurrir a otra ecuación de equilibrio con objeto de su determinación. Esta ecuación puede ser la de equilibrio de momentos, en la parte de estructura de la primera figura (9.15a), de todas las fuerzas respecto al nudo 5. Se deduce:

$$-10 \cdot 4 + M_{21} - M_{21} \cdot 4 \frac{\sqrt{2}}{2} - M_{56} = 0 \quad (9.14)$$

es decir 
$$N_{21} = -\frac{10}{\sqrt{2}} - EI \frac{0,0637}{\sqrt{2}} \lambda_1 \quad (9.15)$$

Sustituyendo la expresión del axil  $N_{21}$  en las dos ecuaciones (9.12) y (9.13), se obtiene un sistema de dos ecuaciones con las dos incógnitas  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , puesto que los cortantes  $Q_{ij}$  pueden escribirse en función de los momentos como sigue:

$$Q_{ij} = - \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L_{ij}} = -\lambda_1 \frac{M_{ij}^{(1)} + M_{ji}^{(1)}}{L_{ij}} - \lambda_2 \frac{M_{ij}^{(2)} + M_{ji}^{(2)}}{L_{ij}} = \lambda_1 Q_{ij}^{(1)} + \lambda_2 Q_{ij}^{(2)}$$

con  $L_{ij}$  longitud de la barra  $ij$ .

El sistema de ecuaciones que resulta es:

$$0,5659\lambda_1 - 0,0377\lambda_2 = - \frac{5}{EI}$$

(9.16)

$$-0,5659\lambda_1 - 0,0377\lambda_2 = 0$$

cuya solución es:

$$\lambda_1 = - \frac{4,4177}{EI} ; \quad \lambda_2 = \frac{66,3130}{EI}$$

Los resultados totales se obtienen en las siguientes tablas:

TABLA 9.7. Resultados totales del cálculo traslacional.

BARRA $ij$	$\frac{M_{ij}^{(1)}}{EI}$	$\frac{M_{ij}^{(2)}}{EI}$	$M$ (mt)	$L_{ij}$ (m)	$Q_{ij}$ (t)
1-2	0,1575	-0,1630	-11,50	$4\sqrt{2}$	3,76
2-1	0,1274	-0,1385	- 9,75	$4\sqrt{2}$	3,76
2-3	0,4666	0,0693	2,53	4	-0,62
3-2	0,5303	0,0346	- 0,05	4	-0,62
2-4	-0,5940	0,0693	7,22	4	-2,97
4-2	-0,5303	0,0346	4,64	4	-2,97
3-5	-0,5303	-0,0346	0,05	4	0,48
5-3	-0,5940	-0,0693	- 1,97	4	0,48
4-5	0,5303	-0,0346	- 4,64	4	2,83
5-4	0,4666	-0,0693	- 6,66	4	2,83
5-6	0,1274	0,1385	8,62	$4\sqrt{2}$	-3,31
6-5	0,1575	0,1030	10,11	$4\sqrt{2}$	-3,31

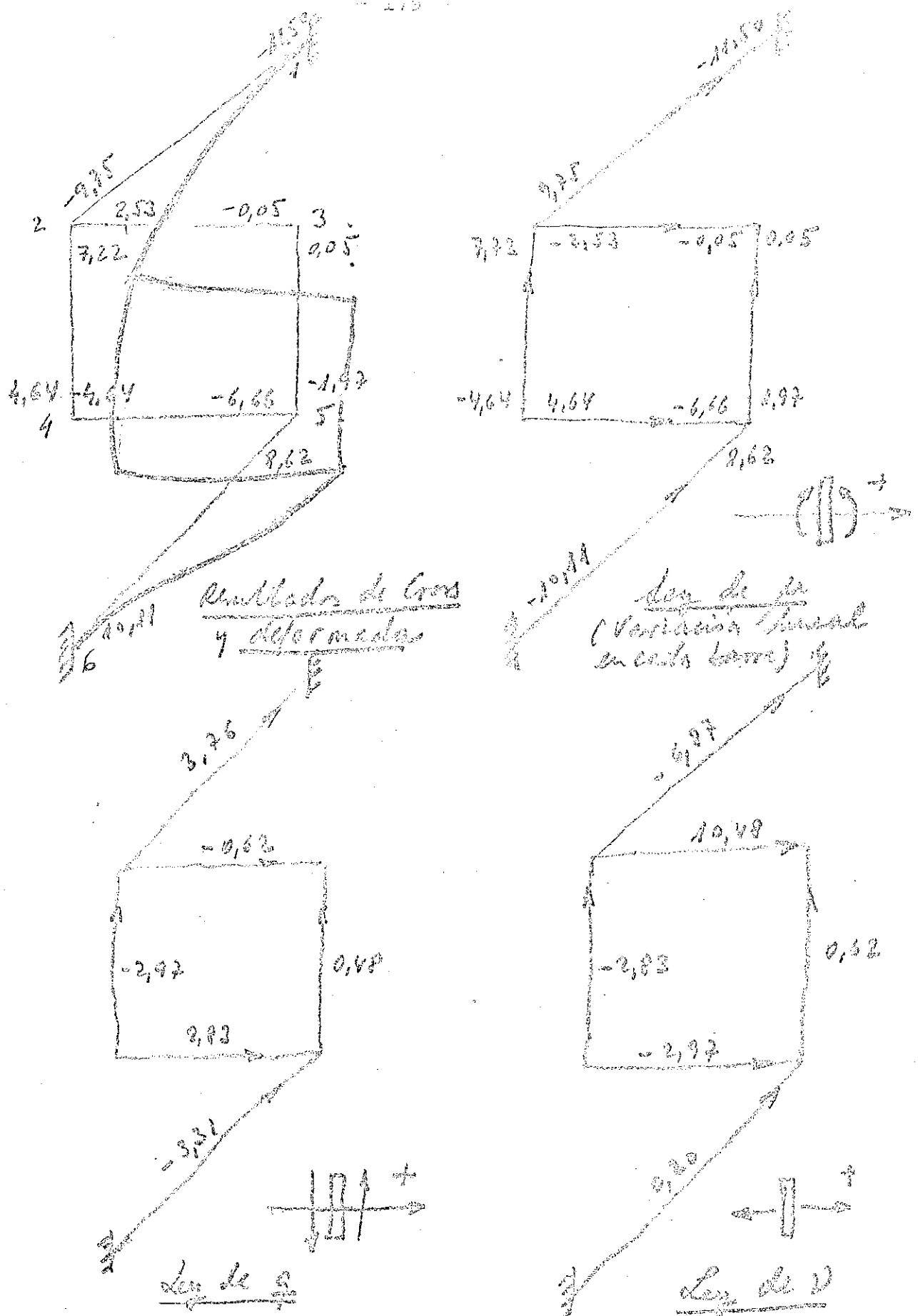


Figura 9.16. Leyes de esfuerzos y movimientos en la estructura del ejemplo 9.2.

Las leyes de todos los esfuerzos se deducen una vez conocidos los valores de los axiles en los extremos de cada barra. Para ello, basta plantear las dos ecuaciones de equilibrio en los nudos: (no existen cargas en las barras y los axiles dentro de cada barra son constantes) comenzando por un nudo con dos barras concurrentes y pasando a otro en el que sólo existan dos axiles desconocidos. De este modo se puede proceder iniciando el cálculo en el nudo 3, y pasar a los siguientes: 2, 4 y 5. Las leyes de esfuerzos se muestran en la figura 9.16.

Los movimientos de los nudos de la estructura se deducen como combinación lineal de los dos estados paramétricos básicos  $E_1$  y  $E_2$ , es decir:

$$E = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2$$

siendo  $\lambda_1 = - \frac{4,4177}{EI} = -0,022 \text{ cm.}$

$$\lambda_2 = \frac{66,3130}{EI} = 0,0332 \text{ cm.}$$

Los movimientos totales en los nudos se deducen de simples consideraciones geométricas como sigue:

$$d_2 = -\lambda_1 + \lambda_2 = 0,354 \text{ cm.}$$

$$d_3 = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = 0,333 \text{ cm.}$$

$$d_4 = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = 0,333 \text{ cm.}$$

$$d_5 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0,310 \text{ cm.}$$

Las componentes en centímetros de estos movimientos según dos ejes,  $x$  (horizontal de izquierda-derecha) e  $y$  (vertical hacia arriba), son:

$$\begin{aligned}d_2 &= 0,354 ; & d_{2x} &= 0,25 ; & d_{2y} &= 0,25 \\d_3 &= 0,333 ; & d_{3y} &= 0,25 ; & d_{3y} &= 0,22 \\d_4 &= 0,333 ; & d_{4x} &= 0,22 ; & d_{4y} &= 0,25 \\d_5 &= 0,310 ; & d_{5x} &= 0,22 ; & d_{5y} &= 0,22\end{aligned}$$

y la deformada de la estructura se representa en la figura 9.16.

Se observa, de lo expuesto en este apartado, que en el cálculo de una estructura traslacional existen tres aspectos fundamentales que deben ser cuidadosamente examinados: 1) Determinación del grado de traslacionalidad  $\alpha$ . 2) Selección de los  $\alpha$  estados paramétricos  $E_a$  ( $a = 1, 2, \dots, \alpha$ ) más adecuados. 3) Planteamiento, de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas más convenientes, desde el punto de vista de cálculo (con el menor número de esfuerzos axiales desconocidos).

En general, no es posible dar, con carácter general, una técnica que permita resolver los tres problemas anteriores; sin embargo, algunas normas pueden ser tenidas en cuenta y ser una ayuda eficaz en su resolución. En primer lugar, es importante comprobar las peculiaridades geométricas de la estructura que pueden enmascarar su verdadero grado de traslacionalidad. Por otra parte, conviene observar las simetrías de las cargas actuantes, puesto que su existencia disminuye el número de estados paramétricos básicos de movimientos susceptibles de tener lugar, es decir, cargas simétricas o antisimétricas únicamente pueden excitar estados paramétricos simétricos o antisimétricos. En relación con esta idea, puede ser de interés, desde el punto de vista computacional, descomponer el estado de cargas sobre una estructura simétrica en las dos situaciones simétrica y antisimétrica para los que el número de estados paramétricos se reduce así como las simplificaciones en el cálculo de Cross son aplicables (apartado 8.3.).

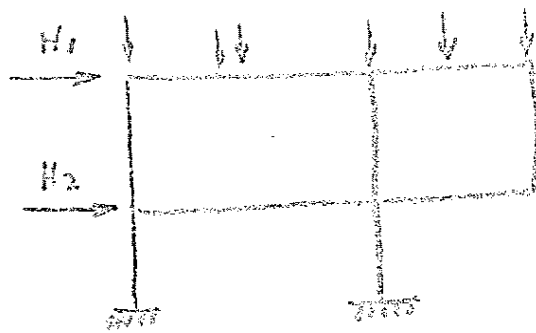
Con referencia a la selección de la base de estados paramétricos, particularmente en las estructuras simétricas, existe frecuentemente el dilema de considerar estados paramétricos que impliquen un único cálculo de Cross -estados B1 y B2 de la figura 9.5.-, frente a estados paramétricos simétricos y antismétricos que suponen una reducción considerable en los cálculos de Cross -estados A1 y A2 de la figura 9.5.- No es posible llegar a una conclusión definitiva; sin embargo, en el caso de que las simplificaciones de simetría permitan reducir el cálculo de Cross al reparto en un solo nudo, parece más conveniente la elección de los estados simétricos (estados A1 y A2 de la figura 9.5).

Por último, con relación al planteamiento de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas, que permiten determinar los movimientos generalizados de los nudos, las orientaciones siguientes pueden ser útiles: a) Intentar aislar mediante cortes adecuados aquellas partes de la estructura que contengan conjuntos cotraslacionales de nudos. b) Procurar, en los casos de estructuras simétricas, que se mantengan la simetría y antisimetría en las partes de estructura cuyo equilibrio se plantea.

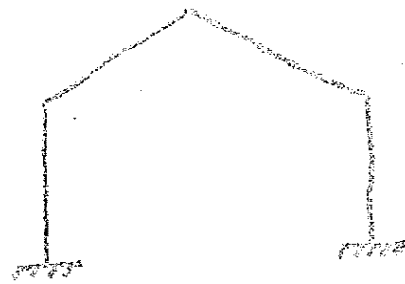
A continuación se exponen algunos ejemplos de resolución de estos tres puntos principales del cálculo de estructuras traslacionales, meramente indicativos y no exhaustivos, de las posibilidades existentes, y pueden servir de modelo para el cálculo de otros tipos de estructuras más complejas.

Ejemplo 9.3. Determinar el grado de traslacionalidad, una base conveniente de estados paramétricos y unas ecuaciones de equilibrio de fuerzas que permitan calcular, en un análisis traslacional, los desplazamientos generalizados de las estructuras representadas en la figura 9.17.

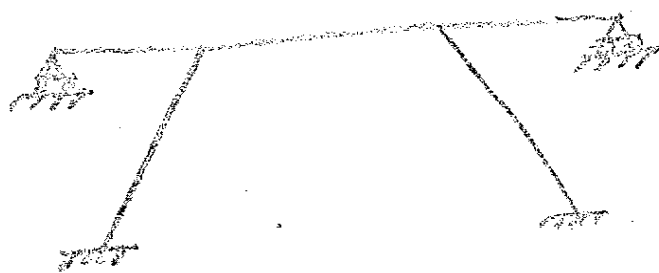
Se representan en las figuras 9.18 a 9.22 las respuestas



(a)



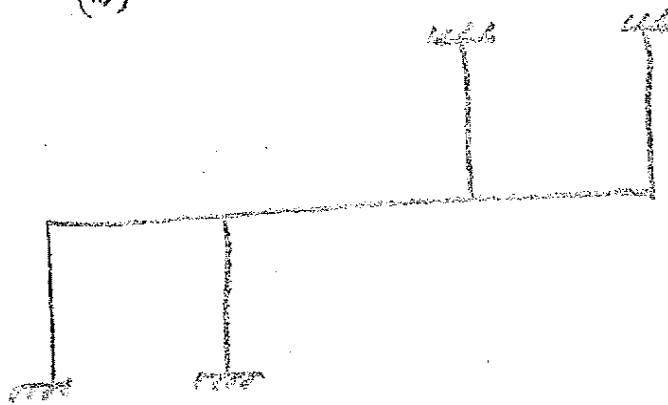
(b)



(c)



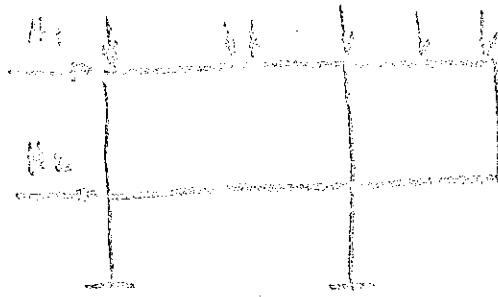
(d)



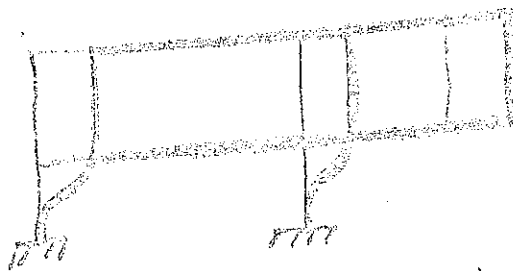
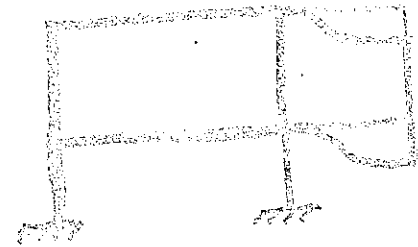
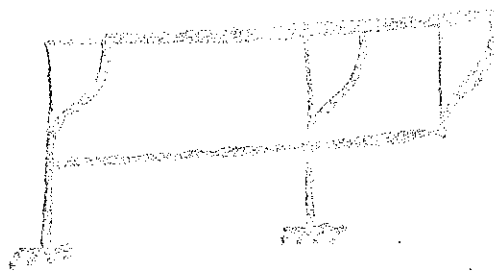
(e)

Figura 9.17. Ejemplo 9.3.



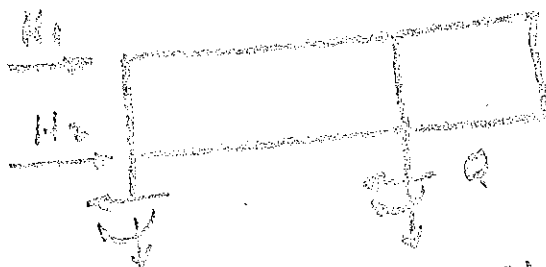


(a)  $\alpha = 3$  Grados de libertad

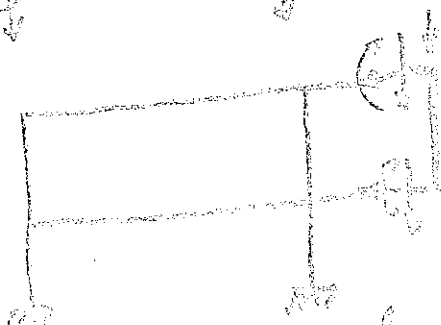


(b) Soluciones iniciales de los modos paramétricos

$$\sum Q + H_1 = 0$$



$$\sum Q + H_1 + H_2 = 0$$



(c) Funciones de equilibrio

Figura 9.18. Cálculo de la estructura 9.17a. Ejemplo 9.3.

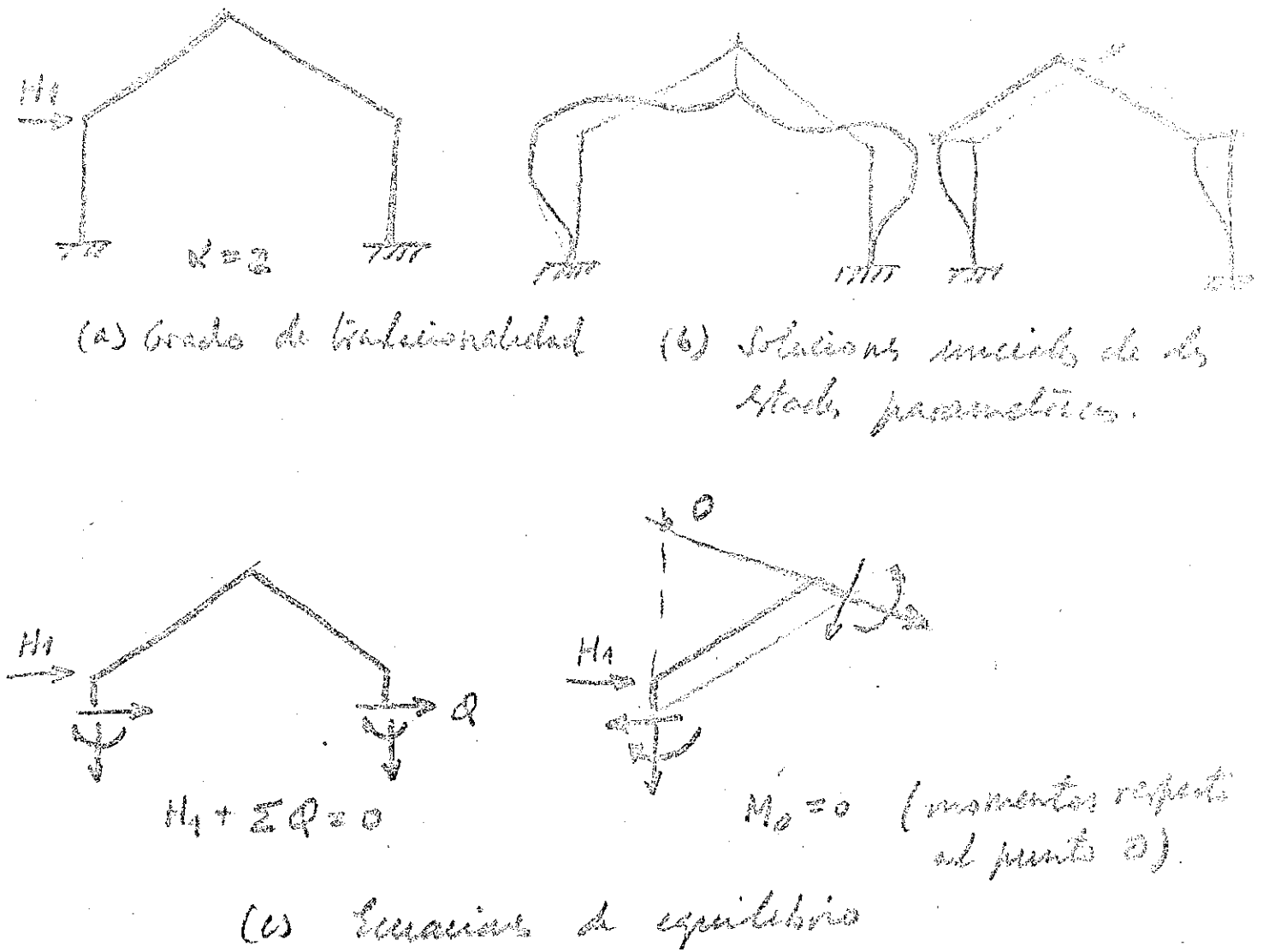


Figura 9.19. Cálculo de la estructura 9.17b. Ejemplo 9.3.

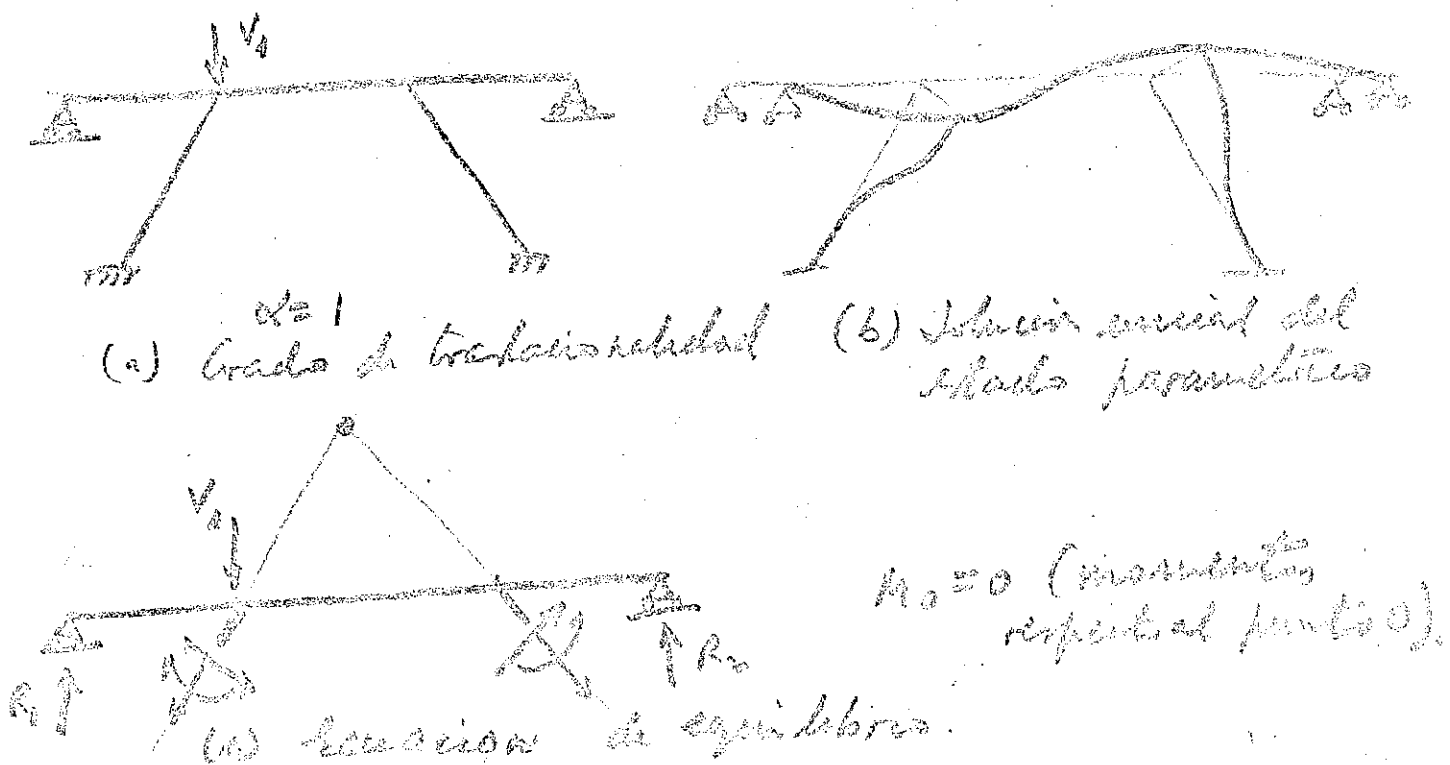
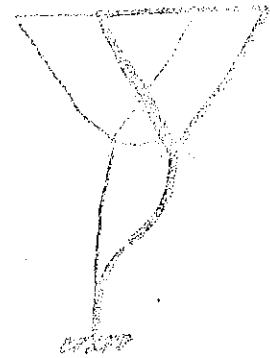
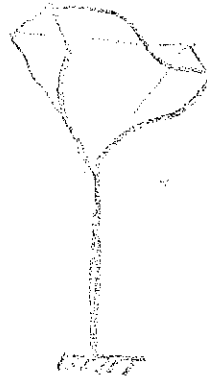
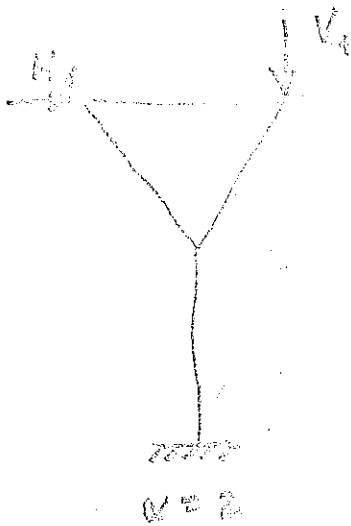
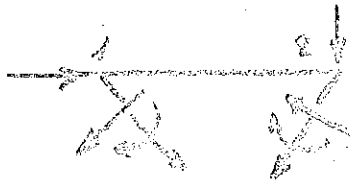
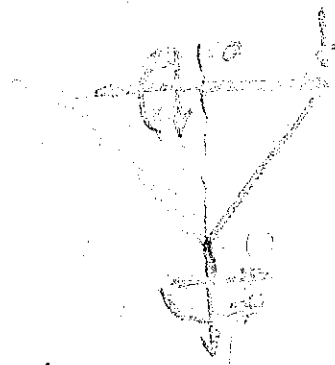


Figura 9.20. Cálculo de la estructura 9.17c. Ejemplo 9.3.



(a) Grado de indeterminación.

(b) Soluciones usuales de los estados perturbados.

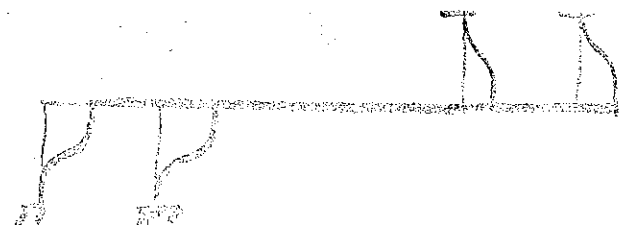
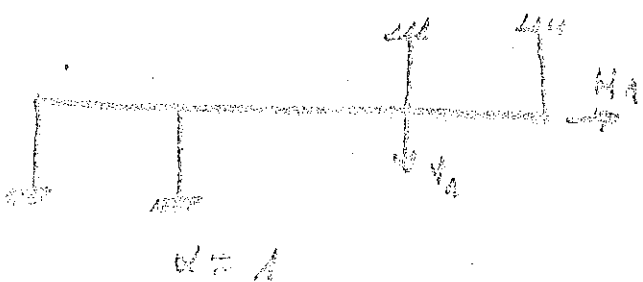


$M_0 = 0$   
(momentos repite  
al punto 0).

$H_0 + \sum Q_1 u_1 + \sum N v_1 = 0$   
los valores de \$N\$ se obtienen  
del equilibrio de fuerzas  
verticales en los nudos 1 y 2

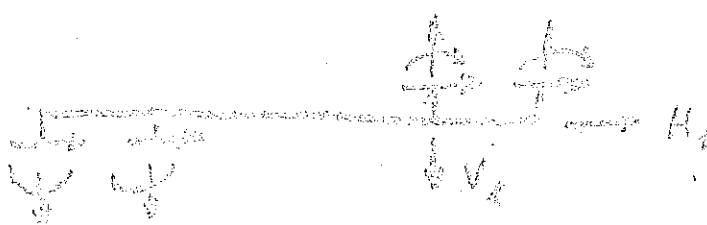
(c) Funciones de equilibrio.

Ejemplo 9.21. Cálculo de la estructura 9.17d. Ejemplo 9.3.



(a) Grado de indeterminación

(b) Estados perturbados.



$$H_0 + \sum Q_1 = 0$$

(c) Funciones de equilibrio

Figura 9.22. Cálculo de la estructura 9.17e. Ejemplo 9.3.

a las cuestiones del enunciado. Se ha supuesto que las cargas y las geometrías de las estructuras eran generales, es decir, sin ningún tipo de simetría.

Existen ciertos tipos de estructuras criptosimétricas (ver apartado 8.3), para las cuales algunos estados paramétricos no son simétricos ni antimétricos, pero en los que es posible realizar simplificaciones en el cálculo de Cross de simetrías o antisimetrías, si se consideran los momentos de desequilibrio sobre los nudos (cálculo modal). El ejemplo que sigue ilustra esta idea, en una estructura simétrica y en otras variantes de ella.

Ejemplo 9.4. Indicar el método de cálculo de las deformadas producidas por las bases de estados paramétricos correspondientes a las estructuras de la figura 9.23. Se indicará expresamente el tipo de reducción posible en el cálculo de Cross.

La estructura tiene un grado de traslacionalidad y el estado paramétrico que resulta en la estructura simétrica primitiva es antimétrico, según se indica en la figura 9.24. Los valores de los momentos de empotramiento rígido en los soportes, vanos lateral y central del dintel se designan por  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , respectivamente. Estos momentos, considerando un movimiento total unidad en cada nudo del dintel, son:

$$\alpha = \frac{6EI}{h^2} \cos^2 \alpha$$

$$\beta = \frac{3EI}{h^2 \operatorname{sena}} \cos^2 \alpha$$

$$\gamma = \frac{12EI}{L^2} \operatorname{sena}$$

En las estructuras criptosimétricas derivadas se dedu-

*7) Para la estructura de la figura 9.23, se considera el estado paramétrico que resulta en la estructura simétrica primitiva es antimétrico, según se indica en la figura 9.24. Los valores de los momentos de empotramiento rígido en los soportes, vanos lateral y central del dintel se designan por  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , respectivamente. Estos momentos, considerando un movimiento total unidad en cada nudo del dintel, son:*

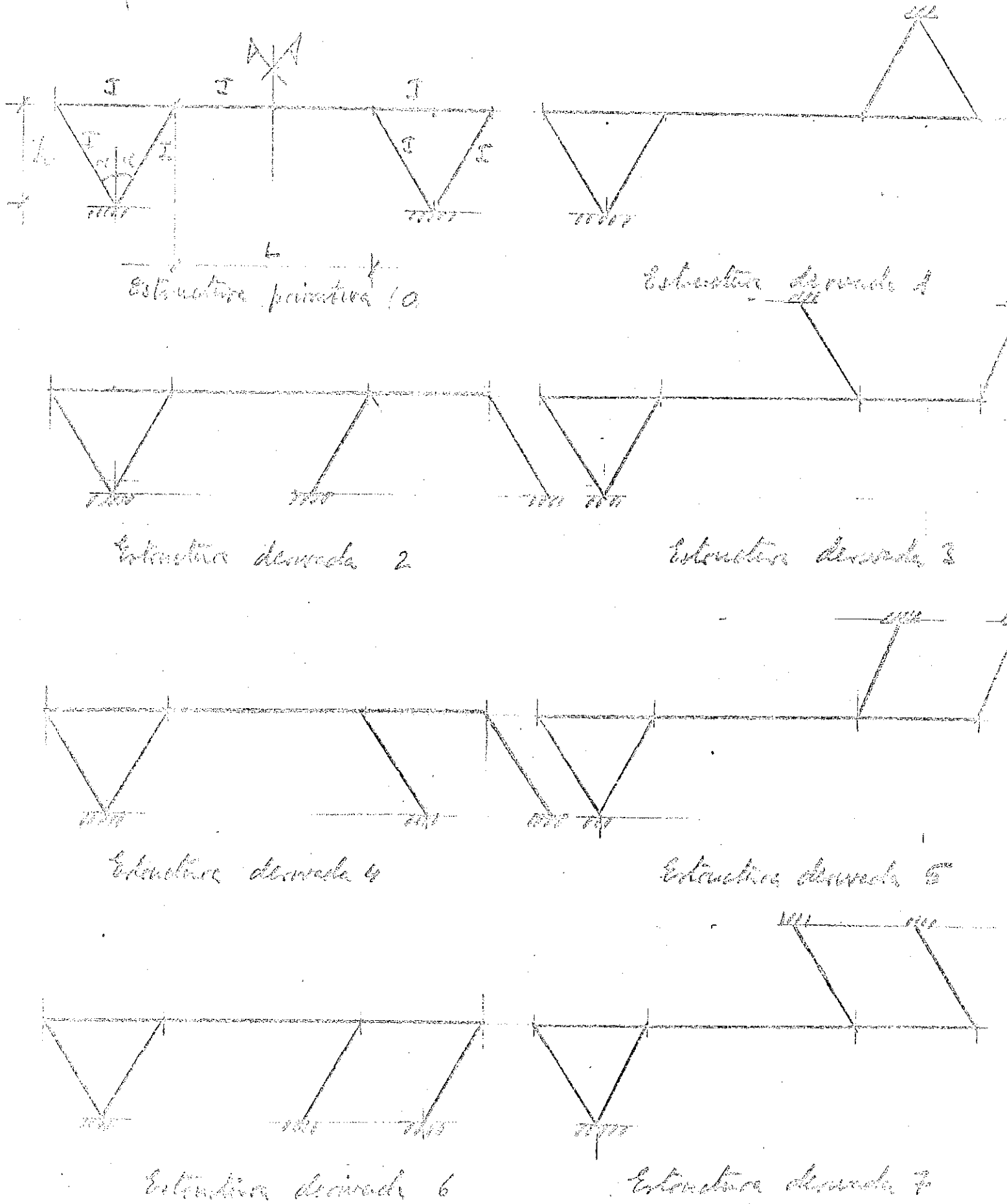


Figura 9.23. Estructura simétrica y derivadas.

cen los resultados que se indican en la figura 9.24, para los cálculos de Cross de los estados paramétricos, y se resumen en la tabla 9.8.

TABLA 9.8. Cálculos simplificados de Cross.

ESTRUCTURA	CALCULO DE CROSS	
	SIMETRICO	ANTIMETRICO
0	-	$\alpha, \beta, -\gamma$
1	$\alpha, \beta, 0$	-
2	$0, \beta, 0$	$\alpha, 0, 0$
3	$\alpha, 0, 0$	$0, \beta, -\gamma$
4	$\alpha, \frac{\beta}{2}, -\gamma$	$0, \frac{\beta}{2}, 0$
5	$\alpha, \frac{\beta}{2}, 0$	$0, \frac{\beta}{2}, 0$
6	$0, \frac{\beta}{2}, 0$	$\alpha, \frac{\beta}{2}, 0$
7	$\alpha, \frac{\beta}{2}, 0$	$0, \frac{\beta}{2}, -\gamma$

### 9.3. ESTRUCTURAS BAJO ACCIONES CINEMATICAS

Como se ha indicado en el apartado 8.5, existen dos - clases de acciones: estáticas -que comprenden fuerzas y esfuerzos - impuestos- y cinemáticas -que incluyen los movimientos y deformaciones iniciales. El tratamiento en el cálculo de ambas clases de acciones es semejante, y todos los comentarios expuestos en el citado - apartado, con referencia a las estructuras de nudos no desplazables, son totalmente aplicables a este caso.

En las estructuras traslacionales las acciones se cal

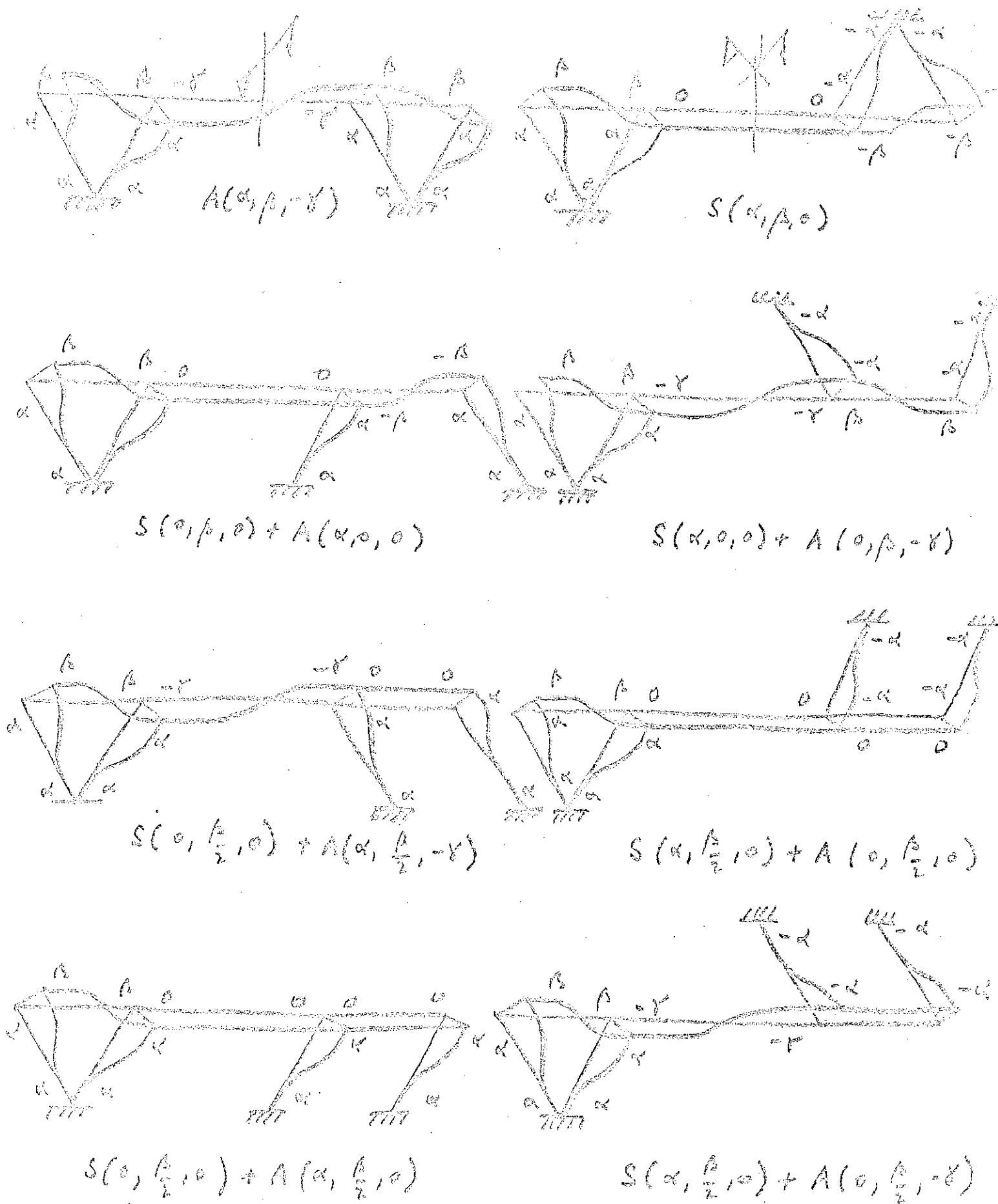


Figura 9.24. Soluciones del ejemplo 9.4.

culan en el estado (0) suponiendo que sus nudos se desplazan, por lo que esta clase de acción se aplica en este estado. Con objeto de obtener la deformada inicial en el estado (0), es a veces conveniente situar unos apoyos exteriores que convierten la estructura en intraslacional y deducir en esa situación la deformada inicial correspondiente al estado (0). Sin embargo, no es preciso proceder de este modo, y es válido suponer una deformada arbitraria, pero compatible con las deformaciones y movimientos impuestos, como deformada inicial del estado (0). La corrección que permite obtener los desplazamientos finales de los nudos se alcanza mediante la superposición de los  $n$  estados paramétricos básicos, de modo idéntico a como se procede en el caso de carga estática. A veces, es importante, en estructuras con simetrías, proceder a la búsqueda de una deformada simétrica, debida a los movimientos o deformaciones impuestos en el estado (0), en lugar de una general como se representa en las figuras 9.25a y 9.25b. De este modo no sólo se simplifica el cálculo del Cross del estado (0), sino que se evita considerar el estado paramétrico antimétrico (figura 9.25c), que no se activa con el tipo de deformada inicial simétrica del estado (0). A continuación se expone un ejemplo ilustrativo del cálculo de los efectos de este tipo de acciones cinemáticas en estructuras traslacionales.

Ejemplo 9.5. En la estructura representada en la figura 9.26 a determinar los movimientos del nudo 4 producidos por un descenso vertical de 5 cm. del apoyo 6.

Todas las barras son de hormigón e inelongables, con una sección rectangular de  $0,60 \times 0,20 \text{ m}^2$ , a excepción de la barra simétrica 2-3 que presenta una sección transversal variable longitudinalmente.

Se sabe que bajo un descenso relativo de apoyos de 3 cm., la barra 2-3, supuesta aislada y rígidamente empotrada en sus extremos, experimenta un momento de empotramiento de 120 mt.



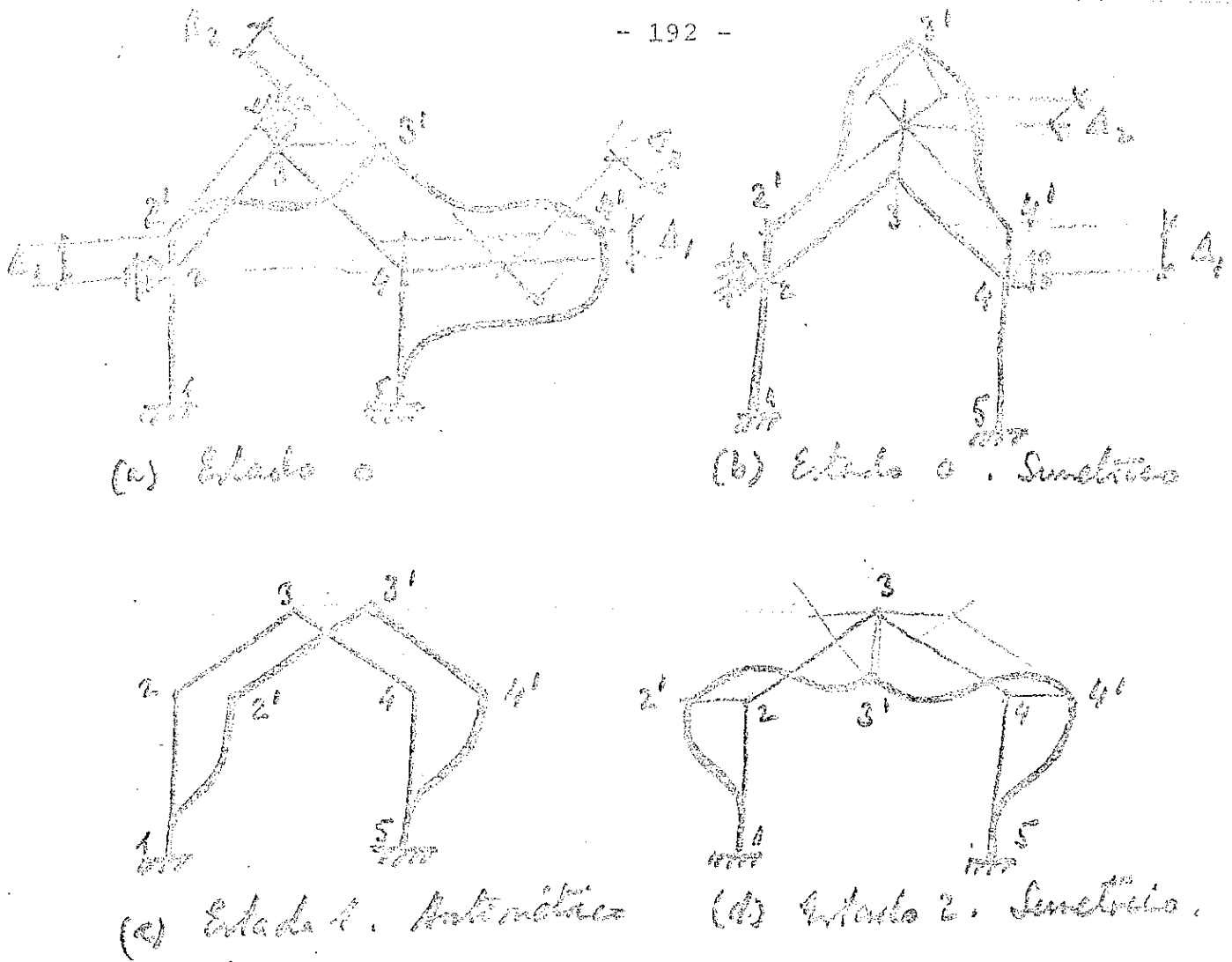


Figura 9.25. Pórtico a dos aguas simétrico.

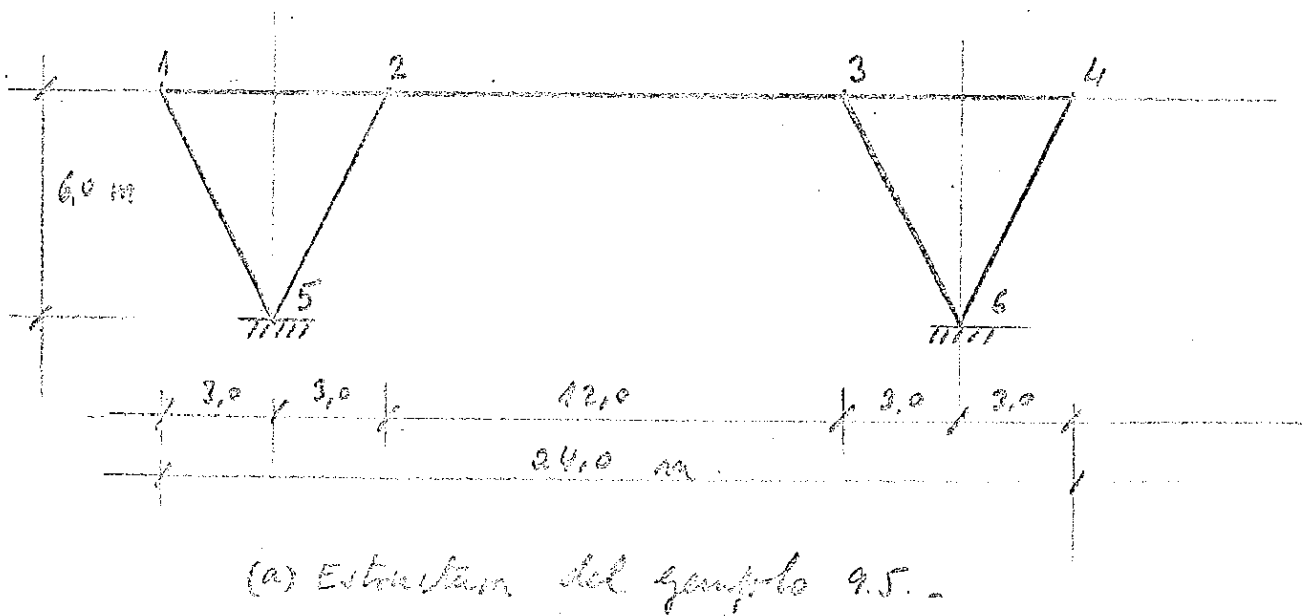


Figura 9.26. Ejemplo 9.5.

El módulo de elasticidad de todas las barras es de  $3 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}$ .

La estructura es una vez traslacional y puede suponerse coartado el dintel al desplazamiento horizontal, para deducir la deformada inicial del estado de cargas (0). En la figura 9.26b se representa la solución inicial de este estado de acciones reales y se comprueba que es antimétrico. Asimismo, el estado paramétrico (1) se muestra en la figura 9.26c y se observa que también es antimétrico.

Los momentos de empotramiento rígido de la barra 2-3, para cada uno de los estados, según el enunciado, son los siguientes:

$$\text{Estado (1): } M_{23}^0 = M_{32}^0 = \frac{5}{3} 120 = 200 \text{ mt.}$$

$$\text{Estado (2): } M_{23}^0 = M_{32}^0 = -\frac{120}{0,03} \cdot 1 = -4000 \text{ mt.}$$

Los momentos de empotramiento rígido en las restantes barras se deducen de simples consideraciones geométricas.

La rigidez antimétrica de la barra 2-3 se obtiene de la ecuación constitutiva de la viga:

$$M_{32} = M_{23} = -R(1+\gamma) \frac{\Delta}{L}$$

y con valores numéricos:

$$M_{32} = M_{23} = 120 = R(1+\gamma) \frac{0,03}{12}$$

es decir  $R_{\text{ant}} = R(1-\gamma) = \frac{120 \cdot 12}{0,03} = 48.000 \text{ mt.}$

Los cálculos de Cross se resumen en la tabla 9.9.

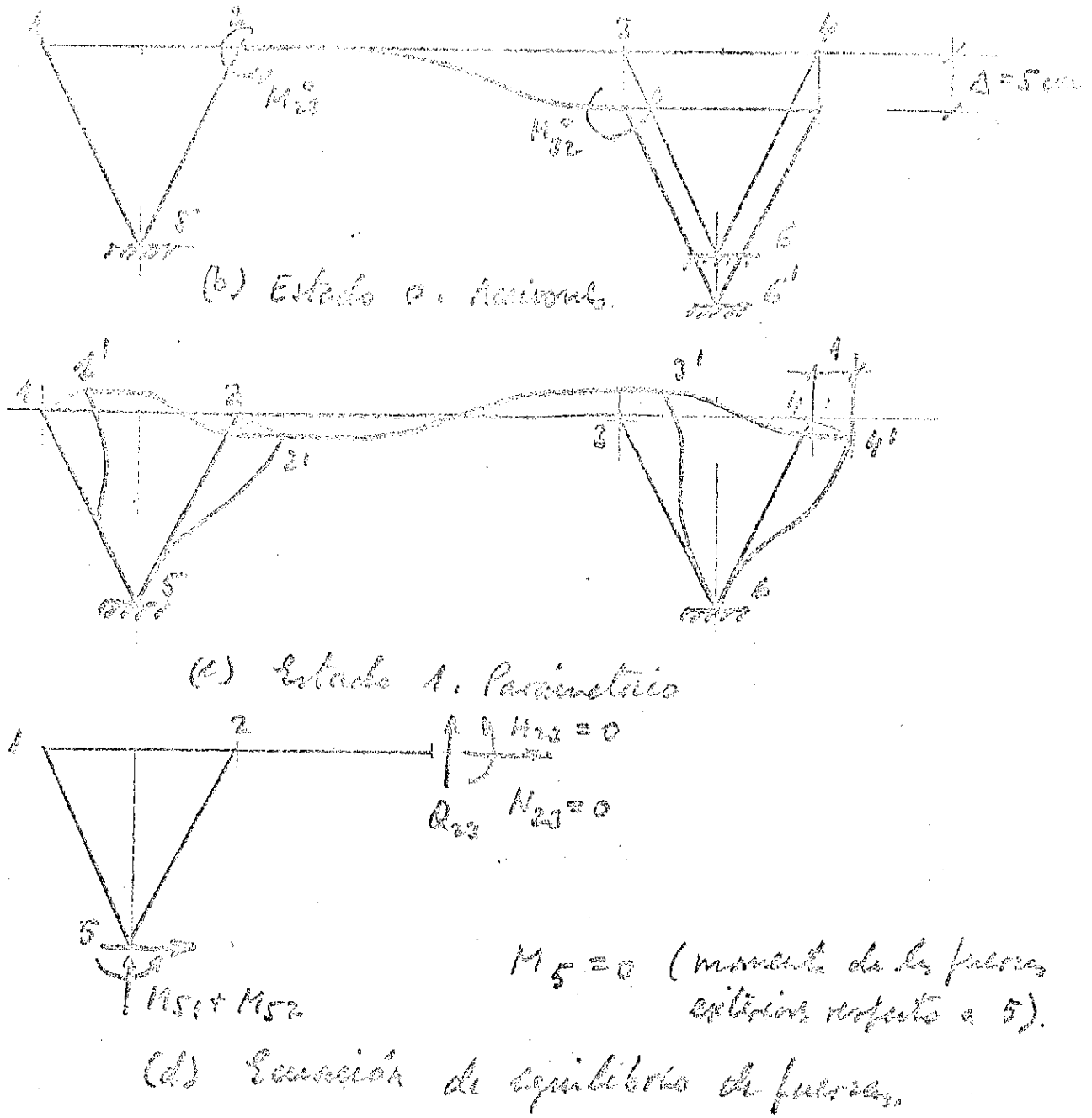


Figura 9.26. Ejemplo 9.5.

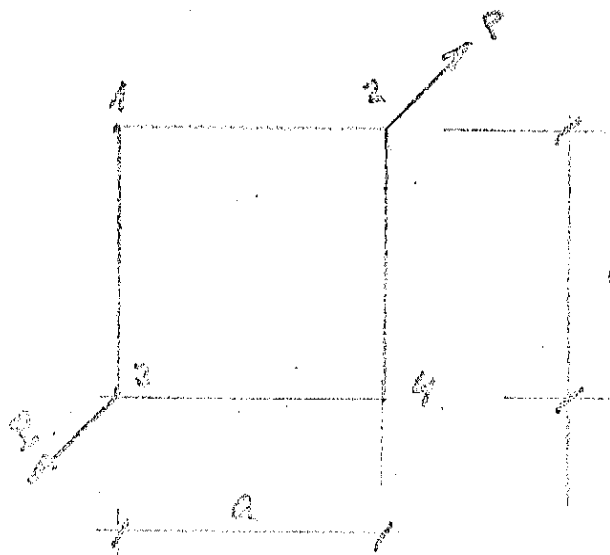


Figura 9.27. Estructura del ejemplo 9.7.

TABLA 9.9. Cálculos de Cross asimétricos.

NUDO	1		2			Observaciones
BARRA	1-2	1-5	2-1	2-5	2-3	
R	7200	6440	7200	6440	48000	
k	0,528	0,472	0,117	0,104	0,779	
M <sup>0</sup>	0	0	0	0	200	Estado (0)  M <sub>51</sub> = 2,76  M <sub>52</sub> = -10,40
M <sup>1</sup>	0	0	-23,40	-20,80	-155,8	
M <sup>2</sup>	0	-11,7	0	0	0	
M <sup>3</sup>	5,52	6,18	0	0	0	
M	5,52	-5,52	-23,40	-20,80	44,20	
M <sup>0</sup>	1800	1610	1800	1610	-4000	Estado (1)  M <sub>51</sub> = 797  M <sub>52</sub> = 1687
M <sup>1</sup>	-1800	-1610	69	61	460	
M <sup>2</sup>	34	0	-100	0	0	
M <sup>3</sup>	-18	-16	105	94	701	
M	16	-16	1074	1756	-2839	

Los esfuerzos totales son suma de los dos estados: (0) +  $\lambda_1$ (1). La ecuación que determina el movimiento horizontal inconnita del dintel puede ser la correspondiente a la anulación de momentos respecto al nudo 6, en la semiestructura indicada en la figura 9.26d. Resulta:

$$9Q_{23} + M_{51} + M_{52} = 0$$

es decir

$$9(-7,37 + 473,18\lambda) + (2,76 - 10,40) + (797 + 1687)\lambda = 0$$

La solución de la ecuación anterior es:

$$\lambda = 0,010965 \text{ m.}$$

Los movimientos de nudo 4 son:

$$\text{Desplazamiento horizontal } u_4 = 1,10 \text{ cm.}$$

$$\text{Desplazamiento vertical: } V_4 = 0,5\lambda + 0,05 = 5,55 \text{ cm.}$$

$$\text{Giro } \theta_1 = \theta_4 = \frac{\sum M(2k+1)}{R} = \frac{6,18 + \lambda(-1610-16)}{6440} = -1,809 \cdot 10^{-3} \text{ radiane}$$

#### 9.4. ESTRUCTURAS NO SUSTENTADAS

En este apartado se estudian estructuras que están sometidas a la acción de un sistema de fuerzas en equilibrio, pero que no encuentran sus movimientos coaccionados con ningún apoyo exterior. Este hecho implica que los movimientos relativos de la estructura - pueden ser calculados, pero los absolutos están indeterminados en un movimiento de sólido rígido. Situaciones en las que aparecen estos - tipos de estructuras sin sustentación corresponden a los casos de análisis conjunto de la estructura y su cimentación, o bien, cuando se considera una parte de una estructura -subestructura- y se calcula bajo la acción de sus cargas propias y las acciones sobre ella del resto de la estructura.

Ejemplo 9.6. La estructura "cajón" de la figura 9.26. se apoya directamente sobre el suelo. Si se establece una hipótesis de respuesta del terreno, se deduce una distribución de reacciones

de éste sobre la estructura que equilibran las cargas propias. Dos hipótesis alternativas, usuales y simples, suelen admitirse en este caso: a) La reacción vertical del terreno es proporcional a la flecha de la viga (terreno tipo Winkler). b) La reacción del terreno es uniforme (caso de viga de contacto muy rígida respecto a un terreno muy deformable).

En estos casos los movimientos totales de la estructura no pueden ser calculados, ya que puede existir un asiento general de la cimentación (movimiento de sólido rígido) sin que las fuerzas actuantes -propias y reacciones del terreno- experimenten modificación. Sin embargo movimientos relativos, que implican deformación de la estructura pueden ser determinados.

Para calcular estas estructuras, se deben de introducir unas coacciones isostáticas arbitrarias; de este modo, se aplican los procedimientos de análisis de estructuras intraslacionales o traslacionales, según el caso, que se han explicado previamente. Conviene tener presente que si la estructura es traslacional, una vez coaccionados sus movimientos de sólido rígido mediante los apoyos isostáticos(\*) estos no deben de ser desplazados en el proceso de obtención de los estados paramétricos, es decir, permanecen fijos. Por otra parte, conviene, en el caso de simetría de la estructura y con cargas simétricas o antimétricas, disponer los apoyos isostáticos de un modo simétrico, y de esta forma, conseguir la reducción a priori de los estados paramétricos no activos y las simplificaciones del método de Cross. Los ejemplos que siguen ilustran estas ideas.

Ejemplo 9.7. Determinar el incremento de longitud de la diagonal 2-3 del cuadrado de la figura 9.17, en el cual todas las barras son iguales de longitud  $a$  y características resistentes  $EI$  constantes.

---

(\*)NOTA: Estos apoyos isostáticos de sustentación de la estructura no reciben reacciones, puesto que las cargas exteriores están en equilibrio.

Se sustenta la estructura isostáticamente, de acuerdo con el esquema de la figura 9.28a. Se observa que la estructura es una vez traslacional. El estado (0) de las cargas propias no produce flexiones, pues la fuerza  $P$  actúa en un nudo. El estado paramétrico se representa en la figura 9.28b y los momentos de empotramiento rígido se consideran proporcionales a los debidos a un desplazamiento generalizado unidad, adoptándose el valor 100. Este estado de cargas es antimétrico respecto a dos ejes, por lo que el cálculo de Cross se reduce a un nudo, como se indica en la tabla 9.10.

TABLA 9.10. Cálculo de Cross antimétrico.

NUDO	2	
BARRA	2-1	2-4
R	$\frac{3EI}{a}$	$\frac{3EI}{a}$
k	0,5	0,5
$M^0$	0	100
$M^1$	-50	-50
M	-50	-50

. X

. X

. X

Una ecuación de equilibrio de fuerzas se muestra en la figura 9.28c, resultando:

$$P \frac{\sqrt{2}}{2} + Q_{13} + Q_{24} = 0$$

con

$$Q_{13} = - \frac{50 \cdot 2}{a} X = Q_{24}$$

$$\text{Por lo tanto } X = \frac{P \frac{\sqrt{2}}{2}}{200} \frac{a}{200}$$





Los momentos finales en todas las barras se representan en la figura 9.28d.

El desplazamiento relativo entre los nudos 2 y 3 es:

$$\Delta_{23} = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta, \quad \text{con} \quad 100X = \frac{6EI}{a^2} \delta$$

es decir:

$$\Delta_{23} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a^2}{6EI} \frac{P a \sqrt{2}}{4} = \frac{P a^3}{24EI}$$

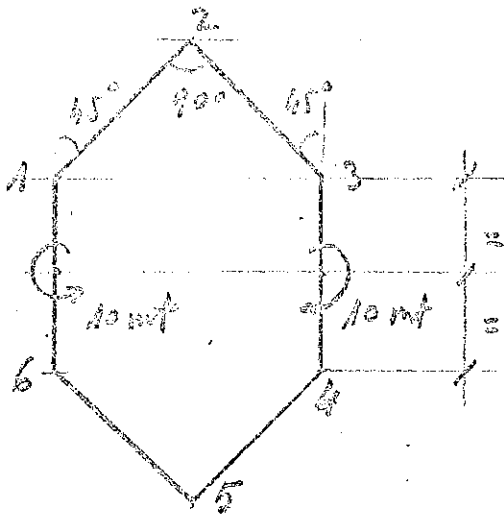
Conviene observar que si se hubiesen adoptado los apoyos simétricamente, como indica la figura 9.28e, y la deformación simétrica de la figura 9.28f, no sería preciso llevar a cabo el cálculo de Cross, ya que la estructura se encuentra directamente en equilibrio de momentos, siendo preciso únicamente establecer el de cortantes, de modo análogo a lo realizado anteriormente. Otra ventaja adicional de proceder de este modo sería que la incógnita es directamente el desplazamiento relativo  $\Delta_{23}$  pedido.

Ejemplo 9.8. Determinar las leyes de esfuerzos en la estructura de la figura 9.29. Todas las barras son de 4 m. de longitud y características EI constantes.

Se observa que si se sustenta la estructura de un modo arbitrario (figura 9.30-a) ésta es tres veces traslacional. Es más conveniente disponer los apoyos de un modo simétrico, con lo que el número de estados paramétricos posibles se reduce a 1, y los cálculos de Cross se reducen al reparto de momentos alrededor de un solo nudo, dadas las condiciones de simetría respecto al eje 2-5 y antisimetría respecto a la recta que une las secciones medias de las barras 1-6 y 3-4.

Los resultados del Cross se deducen en la siguiente tabla 9.11.

*Handwritten note:* Verificar la estructura de la figura 9.29



9.29. - Figura 9.29. Estructura del ejemplo 9.8.

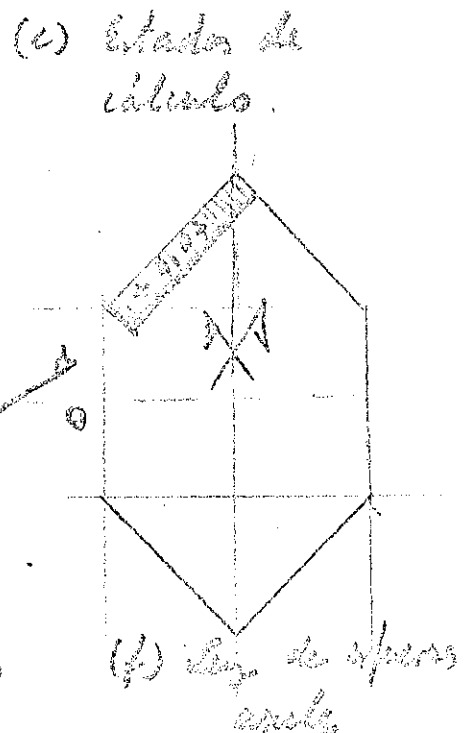
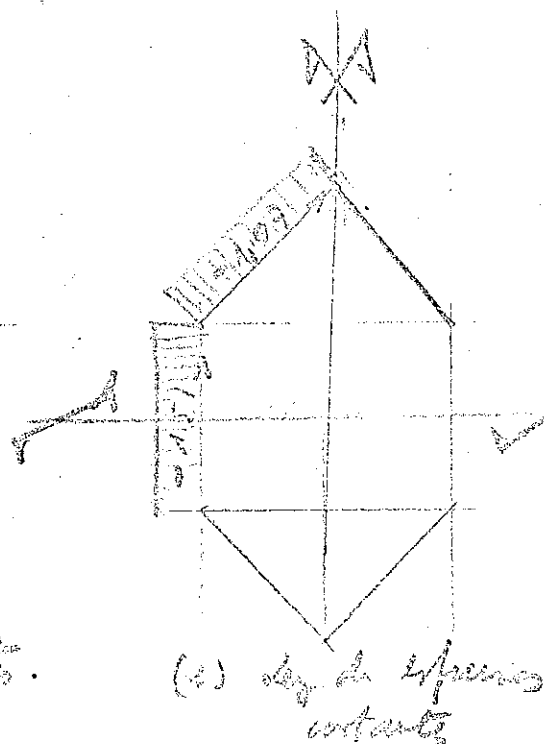
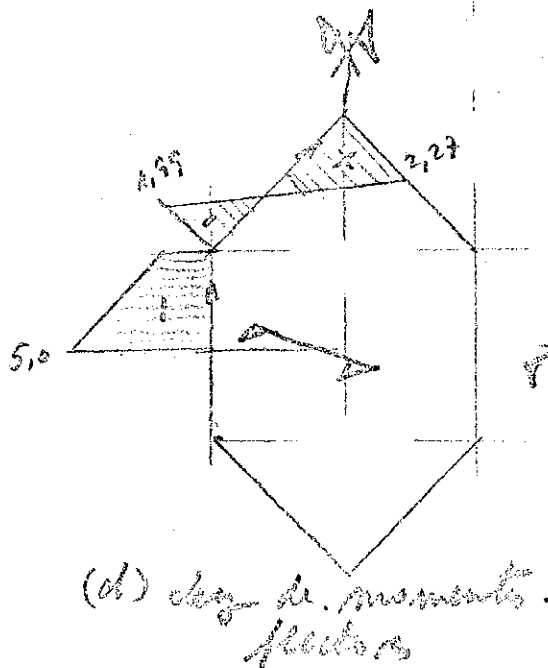
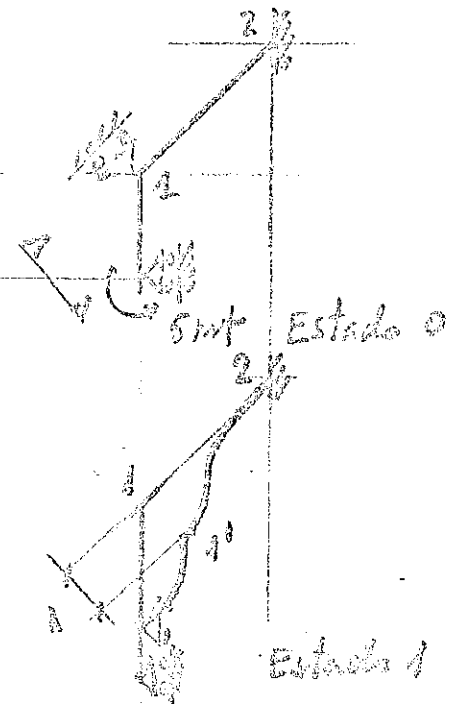
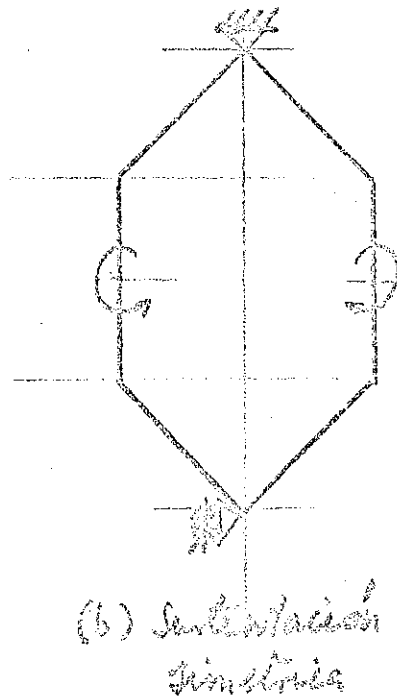
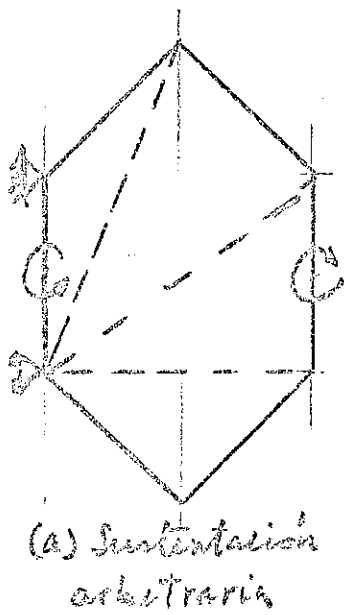


Figura 9.30. Solución del ejemplo 9.8.

TABLA 9.11. Cálculo de Cross.

NUDO	1		Observaciones
BARRA	1-6	1-2	
R	1,5EI	EI	
k	2,5	0,4	
M <sup>0</sup>	2,5	0	
M <sup>1</sup>	-1,5	-1,0	Estado (0)
M	1,0	-1,0	
M <sup>0</sup>	$3\sqrt{2}/8EI$	-3/8EI	
M <sup>1</sup>	-0,0932EI	-0,0621EI	Estado (1)
M	0,4371EI	-0,4371EI	

Una ecuación de equilibrio es:

$$-Q_{21} + Q_{61} \cos 45^\circ = 0$$

es decir  $\lambda_1 = -6,83322 \frac{1}{EI}$

Las leyes de esfuerzos finales se representan en las figuras 9.30d, 9.30e y 9.30f.

#### 9.5. CONSIDERACION DE LA DEFORMACION POR AXIL EN LAS ESTRUCTURAS RETICULADAS

##### 9.5.1. INTRODUCCION

Como se ha indicado en el capítulo 7, una de las simplificaciones importantes introducidas en el cálculo convencional de es-

estructuras planas consiste en no considerar la deformación en las barras producida por los esfuerzos axiales. Desde un punto de vista formal esta simplificación consiste en suponer que la elongabilidad,  $\frac{L}{E\Omega}$ , de las barras es nula. Mediante esta hipótesis simplificadora se reduce, de un modo natural, el número de movimientos que son posibles en las estructuras, lo que, sin duda, permite en un método de análisis en movimientos o rigideces, como es el de Cross, disminuir el esfuerzo de cálculo.

En este apartado, se van a exponer los procedimientos de análisis de las estructuras reticulares planas, para las que no es válida, o por lo menos suficientemente aproximada, la hipótesis de elongabilidad nula en las barras. Existen tres casos importantes, en los que se puede producir esta situación: 1) Esfuerzos secundarios en las estructuras articuladas. 2) Estructuras con barras generalmente soportes- elongables. 3) Estructuras con tirantes.

De cada uno de ellos se darán algunas indicaciones a continuación.

#### 9.5.2. ESFUERZOS SECUNDARIOS EN LAS ESTRUCTURAS ARTICULADAS

Una de las idealizaciones más importantes en el cálculo de construcciones articuladas en celosía consiste en suponer que las barras se encuentran en nudos articulados, incapaces, por lo tanto, de absorber momentos y, en contrapartida, de impedir los giros relativos entre las barras, que se producen al deformarse longitudinalmente éstas. Esta idealización es con frecuencia poco realista, particularmente en las modernas construcciones metálicas con barras unidas a los nudos mediante soldadura o tornillos de alta resistencia, o, de un modo general, en las celosías de hormigón. Sin embargo, las flexibilidades de las barras son normalmente muy elevadas y permiten despreciar, en una primera aproximación, los esfuerzos de flexión, en particular, en comparación con los esfuerzos axiales. En este contexto, los esfuerzos debidos a la flexión que se produce en las barras por las coacciones que entre sí ejercen en los nudos se suelen denominar esfuerzos secundarios, en contraste con el nombre de esfuerzos princi

pales o primarios con que se designan a los axiles. En la mayoría de las estructuras, el cálculo primario o de los esfuerzos axiles, que en general es muy sencillo, en comparación con el secundario o determinación de las flexiones, es suficiente, y sólo en casos excepcionales, estructuras importantes o con barras excesivamente cortas, se hace preciso un análisis de la flexión de las barras. En cualquier caso, en estructuras usuales, el orden de magnitud de las tensiones, del cálculo secundario es de un 10% al 20% (\*).

Las etapas del cálculo de una estructura celosía con sus nudos perfectamente rígidos son las siguientes:

1) Se supone la estructura perfectamente articulada en sus nudos y se obtienen mediante los métodos comentados en el análisis de estructuras articuladas (gráficos o analíticos),  $N_{ij}$  los esfuerzos axiles debidos a la actuación de las cargas exteriores, movimientos y deformaciones impuestos.

2) Con los resultados de los esfuerzos axiles del cálculo anterior se deducen las deformaciones elásticas que se suman a las impuestas para obtener las deformaciones totales en todas las barras. Mediante un diagrama de Williot, se pueden determinar los movimientos de todos los nudos y, en particular, en cada barra  $ij$ , los movimientos transversales relativos entre sus extremos ( $\Delta_{ij}$ ). Si se suponen las barras rígidamente empotradas en los nudos, se producen -

---

NOTA(\*): Conviene distinguir aquí, en el cálculo de las estructuras articuladas, este análisis secundario -que es lineal y que intenta corregir una incompleta idealización estructural- del cálculo de segundo orden, que corresponde a considerar los efectos no lineales normalmente acoplamiento de la flexión y la compresión en este tipo de estructuras. Este último análisis es evidentemente no lineal (efectos de inestabilidad, viga-columna, etc.).

unos momentos de empotramiento rígido, en cada una de ellas de valor:

$$M_{ij}^{(1)} = - \frac{6EI}{L_{ij}^2} \Delta_{ij} \quad (*)$$

(supuesta de sección constante, en otro caso se aplicarían las fórmulas pertinentes del apartado 8.5.).

3) Se realiza un cálculo de la celosía como estructura entramado intraslacional, mediante el método de Cross, y de los resultados que se obtengan (momentos  $M_{ij}^{(1)}$  y  $M_{ji}^{(1)}$  en los extremos de cada barra) se hallan los esfuerzos cortantes en equilibrio, es decir:

$$Q_{ij}^{(1)} = - \frac{M_{ij}^{(1)} + M_{ji}^{(1)}}{L_{ij}} = Q_{ji} \quad (9.17)$$

4) Mediante consideraciones de equilibrio en cada nudo, y supuesta de nuevo la estructura articulada, se pueden deducir, usando las técnicas de estructuras articuladas, los axiles que aparecen en cada barra. Estos esfuerzos axiles  $N_{ij}^{(1)}$  están en equilibrio con los esfuerzos de cortantes deducidos en la etapa anterior. (\*\*).

---

NOTA(\*): Si existen cargas actuando directamente sobre las barras, se se deberían añadir los correspondientes momentos de empotramiento rígido a los que se indican en el texto, procedentes de la desnivelación entre los extremos de cada barra. Por otra parte, de los esfuerzos cortantes que se obtengan (ver fórmula 9.17), se deducirán los valores de las cargas que se hubiesen tenido en cuenta en el cálculo primario, y que son estáticamente equivalentes en cada barra a las cargas que sobre ella actúan.

NOTA(\*\*): Evidentemente en este cálculo no se incluyen los movimientos y deformaciones impuestas, ni tampoco las cargas exteriores.

5) Con los nuevos axiles se lleva a cabo de nuevo la secuencia de operaciones descritas en las etapas 2 a 4, deduciéndose un nuevo conjunto de axiles  $N_{ij}^{(2)}$ , y así sucesivamente hasta que se obtengan unos resultados suficientemente pequeños, es decir, se detiene el proceso de cálculo en la secuencia  $k$  cuando para todas las barras  $ij$  se cumple:

$$|N_{ij}^{(k)}| < \varepsilon \quad (\text{tolerancia especificada})$$

6) Los esfuerzos axiles finales que se producen son la suma de los resultados obtenidos en cada una de las secuencias:

$$N_{ij} = N_{ij}^{(0)} + N_{ij}^{(1)} + N_{ij}^{(2)} + \dots + N_{ij}^{(k)}$$

en donde  $N_{ij}^{(0)}$  corresponde a los esfuerzos axiles primarios y la suma  $N_{ij}^{(1)} + N_{ij}^{(2)} + \dots + N_{ij}^{(k)}$  representa la contribución de los axiles secundarios.

Por otra parte, aparecen en los extremos de las barras los momentos

$$M_{ij} = M_{ij}^{(0)} + M_{ij}^{(1)} + \dots + M_{ij}^{(k)}$$

A efectos prácticos, suele ser suficiente llevar a cabo una sola secuencia de cálculo es decir, adoptar  $k = 1$ .

### 9.5.3. ESTRUCTURAS RETICULARES CON BARRAS ELONGABLES

Existen estructuras reticuladas con dinteles que son rígidos o que presentan luces muy pequeñas respecto a la longitud de los soportes o bien por otras causas referentes a los apoyos en los que llega a tener importancia, en los resultados del cálculo de flexión, la elongabilidad de los soportes. Por ejemplo, en las estructuras típicas de la figura 9.31a, la influencia de los diferentes acortamientos de los pilares puede alterar los esfuerzos de flexión del dintel.

En estructuras de edificación esta situación es poco frecuente, ya que las cargas que reciben los soportes de una misma planta son análogas y las características elastomecánicas de ellos son del mismo orden de magnitud, por lo que no cabe esperar importantes asientos diferenciales entre los extremos de las vigas de los dinteles, puesto que los acortamientos de los pilares contiguos serán aproximadamente iguales.

En los casos para los que sea preciso realizar un cálculo que tenga en cuenta la elongabilidad de todas o algunas barras de la estructura, se puede proceder iterativamente del siguiente modo:

1) Se lleva a cabo un cálculo de la estructura entramado mediante el método de Cross-directo o indirecto, según sea traslacional o no-, sometida a las acciones previstas en el análisis. Los esfuerzos en este cálculo se denominan  $M^{(0)}$ ,  $Q^{(0)}$  y  $N^{(0)}$ .

2) Se obtienen en las barras cuya elongabilidad se considera las deformaciones elásticas  $\lambda^{(0)}$  correspondientes a los esfuerzos axiales  $N^{(0)}$ .

3) Se introducen las deformaciones elásticas  $\lambda^{(0)}$  como deformaciones impuestas en la estructura y se efectúa de nuevo otro cálculo de Cross, deduciéndose unos nuevos esfuerzos  $M^{(1)}$ ,  $Q^{(1)}$  y  $N^{(1)}$ .

4) Se comprueban si los esfuerzos obtenidos son despreciables dentro de la aproximación del cálculo. En caso negativo, se determinan otra vez las deformaciones axiales elásticas  $\lambda^{(1)}$ , correspondientes a estos esfuerzos  $N^{(1)}$ , en las barras con elongabilidad no nula y que sirven para realizar otro cálculo de la estructura entramado, con estas deformaciones como acciones cinemáticas. Se procede con la realización, reiterada y sucesivamente, de la secuencia de etapas 2 y 3, hasta que se obtengan unos esfuerzos  $M^{(k)}$ ,  $Q^{(k)}$  y  $N^{(k)}$ , suficientemente pequeños. Los resultados finales son directamente, la suma de los parciales obtenidos en las sucesivas secuencias, es -



decir,:

$$M = \sum_{k=0}^K M^{(k)}$$

$$Q = \sum_{k=0}^K Q^{(k)}$$

$$N = \sum_{k=0}^K N^{(k)}$$

En general, no suele ser necesarios más de dos cálculos para alcanzar la precisión requerida en los usos prácticos.

Es posible, en ciertos casos en los que sólo un número reducido de barras se consideran elongables, calcular directamente la estructura como se indica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.8. Los soportes de la estructura de la figura 9.31. tienen una sección de área  $\Omega$  e inercia  $I$  y se considera ~~que~~ que pueden experimentar deformaciones axiales. El dintel es inelongable y su inercia constante es  $KI$ . Determinar los esfuerzos axiales en los soportes. Datos numéricos:  $\Omega = 0,05 \text{ m}^2$ .  $I = 10^{-3} \text{ m}^4$  y  $K = 100$ . El módulo de elasticidad del material es  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}$ .

Si se procede iterativamente, la estructura es traslacional de grado  $\alpha = 1$ . Los cálculos de Cross son muy simples, dadas las importantes diferencias relativas entre las rigideces del dintel y soportes. Por lo tanto se deduce:

1) El cálculo del entramado bajo las cargas exteriores conduce a los resultados de la tabla 9.12.

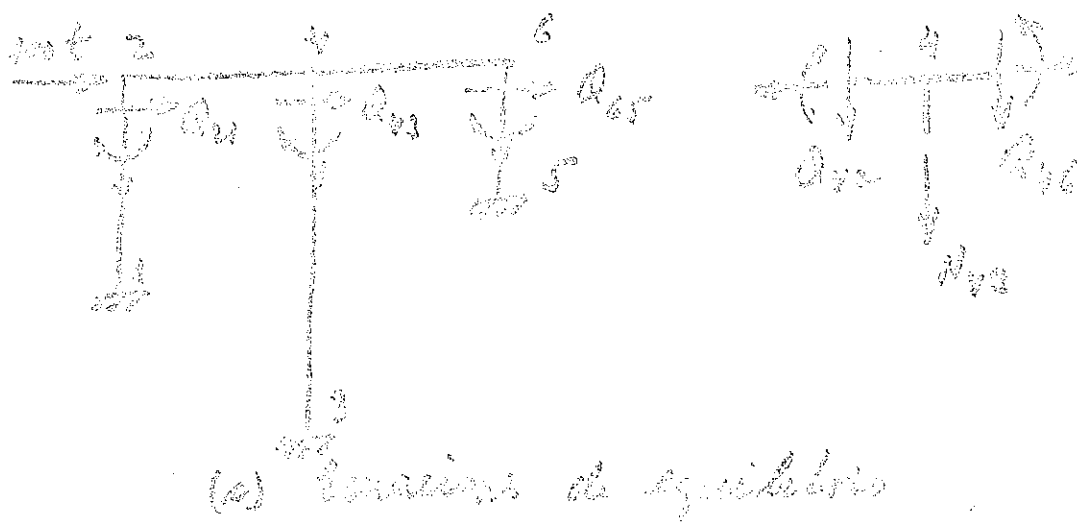
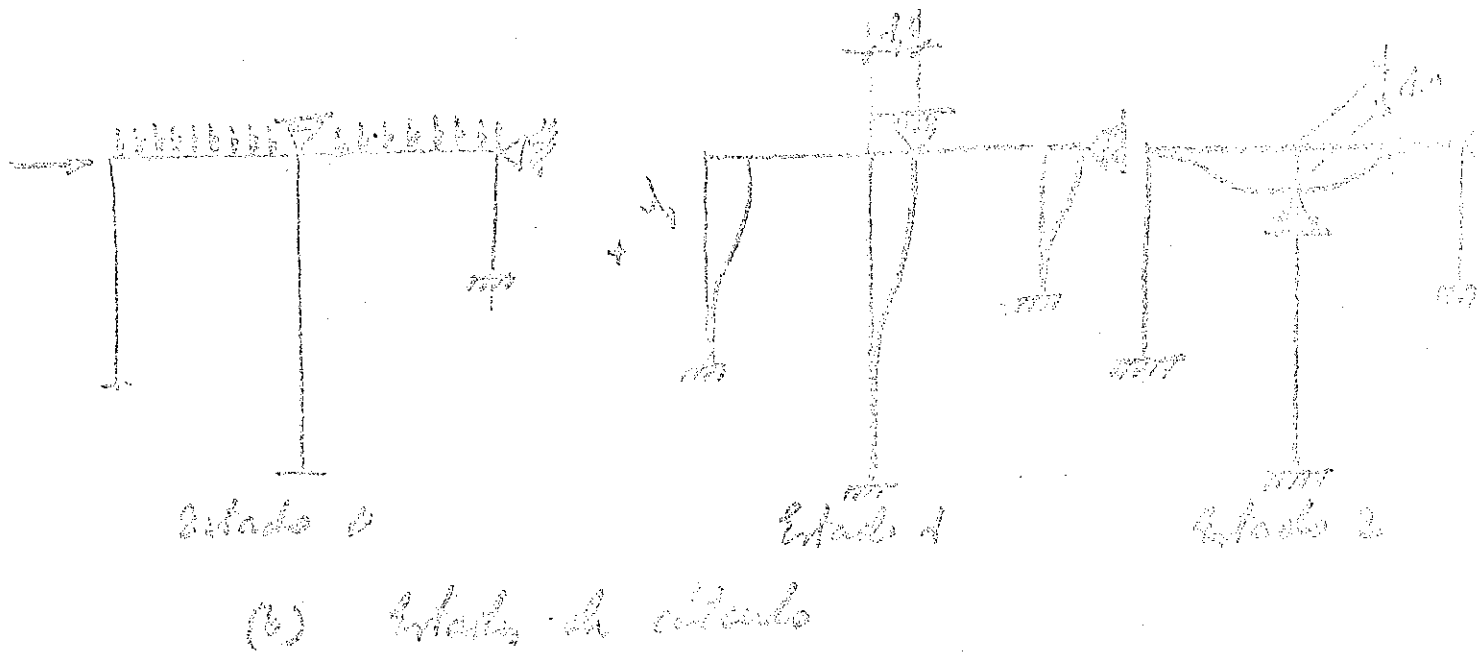
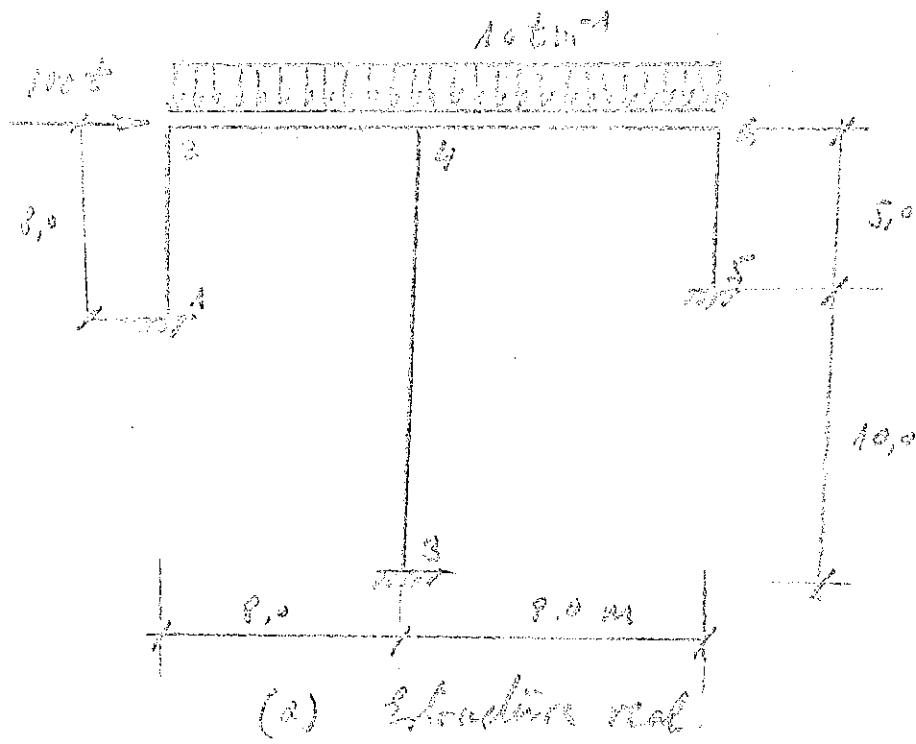


Figura 9.31. Ejemplo 9.8.

TABLA 9.12. Cálculo de la secuencia (0).

NUDO	1	2	3	4	5	6				
BARRAS	1-2	2-1	2-4	3-4	4-2	4-3	4-6	5-6	6-4	6-5
ESTADO(0)	0	0	0	0	-80	0	80	0	0	0
ESTADO(1)	187	187	-187	120	13	120	-133	480	-480	480
FINAL	73	73	-73	47	-75	47	47	188	-188	-188

La ecuación de equilibrio de fuerzas se muestra en la figura 9.31c y es:

$$Q_{21} + Q_{43} + Q_{65} + F = 0$$

Los cortantes son:

$$Q_{21} = -46,75\lambda_1$$

$$Q_{43} = -16,00\lambda_1$$

$$Q_{65} = -192,00\lambda_1$$

es decir,  $\lambda_1 = 0,393$  m y los momentos finales se deducen en la tabla 9.12.

Los axiles en los soportes son, por consiguiente:

$$N_{21} = -40 + \frac{73 + 75}{8} = -21,50 \text{ t.}$$

$$N_{43} = -80 - \frac{73 + 75}{8} - \frac{47 - 188}{8} = -80,87 \text{ t.}$$

$$N_{46} = -43 + \frac{47 - 188}{8} = -57,63 \text{ t.}$$

Las deformaciones correspondientes son:

$$\delta_{21} = -0,172 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

$$\delta_{43} = -1,213 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

$$\delta_{46} = -0,288 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

Con lo que se puede proceder a realizar el cálculo de la secuencia (1), adoptando los siguientes asientos impuestos:

$$\Delta_{42} = -1,041 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

$$\delta_{43} = 0,925 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

TABLA 9.13. Cálculo de la secuencia (1)

NUDOS	1	2	3	4	5	6				
BARRAS	1-2	2-1	2-4	3-4	4-2	4-3	4-6	5-6	6-4	6-5
ESTADO (0)	0	0	0	0	9,23	-9,23	0	0	0	0
ESTADO (1)	187	187	-187	120	13	120	-13	480	-480	480
FINAL	0	0	0	0	9,23	-9,23	0	0	0	0

Los axiles que resultan de este análisis son:

$$N_{21} = -\frac{9,23}{8} = -1,15 \text{ t.}$$

$$N_{43} = \frac{9,23}{8} \cdot 2 = 2,30 \text{ t.}$$

$$N_{46} = - \frac{9,23}{8} = -1,15 \text{ t.}$$

que se considera conducen a deformaciones despreciables.

Por lo tanto, las reacciones totales en los soportes son:

$$N_{21} = -22,65 \text{ t.}$$

$$N_{43} = -78,57 \text{ t.}$$

$$N_{46} = -58,78 \text{ t.}$$

En el caso de considerar únicamente la deformación del soporte central 4-3, las deformaciones impuestas en la secuencia (1) serían, entonces:

$$\Delta_{42} = -1,213 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -\Delta_{43}$$

Los resultados del Cross correspondiente son:

$$M_{42} = -M_{46} = 11,372 \text{ mt.}$$

y los momentos en los restantes extremos de barras son nulos.

Los incrementos de axiles que resultan de este análisis son:

$$N_{21} = -1,42 \text{ t;} \quad N_{43} = 2,84 \text{ t;} \quad N_{46} = -1,42 \text{ t.}$$

y los totales, por lo tanto, se convierten en:

$$N_{21} = -22,92 \text{ t;} \quad N_{43} = -78,03 \text{ t;} \quad N_{46} = -59,05 \text{ t.}$$

Existe un procedimiento directo de cálculo que, en el caso de suponer en la estructura que únicamente la barra 4-3 es elongable, implica considerar un grado de traslacionalidad  $\alpha=2$ . Es preciso llevar a cabo el cálculo del estado paramétrico (2) que se muestra en la figura 9.31b y cuyos resultados de momentos no nulos son:

$$M_{42} = -M_{46} = 9,375 \cdot 10^{-3} \lambda_2$$

Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas se indican en la figura 9.31c y pueden escribirse como sigue:

$$Q_{21} + Q_{43} + Q_{65} + F = 0$$

$$Q_{46} - Q_{42} - N_{43} = 0 \quad (9.18)$$

$$N_{43} = -\left(\frac{E\Omega}{L}\right)_{43} \lambda_2$$

es decir:

$$-254,75\lambda_1 + 100 = 0$$

$$-40 - \frac{80 - 133\lambda_1 - 480\lambda_1}{8} - 40 + \frac{-80 + 13\lambda_1 - 187\lambda_1}{8} - N_{43} = 0$$

$$N_{43} = -66,67 \cdot 10^{-3} \lambda_2$$

con lo que resulta:

$$\lambda_1 = 0,393 \text{ m}; \quad \lambda_2 = 1,176 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad \text{y} \quad N_{43} = -78,43 \text{ t.}$$

que coinciden prácticamente con los valores hallados mediante el procedimiento iterativo.

En el ejemplo propuesto las ecuaciones de equilibrio - de fuerzas 9.18 son desacopladas en las incógnitas, debido a las características de rigideces relativas entre las barras de la estructura. En general esta circunstancia no ocurre.

#### 9.5.4. BARRAS TIRANTES

Se denominan tirantes a las barras de la estructura que únicamente son capaces de soportar esfuerzos axiales. La rigidez a flexión de un tirante se supone despreciable, bien por encontrarse - unido mediante articulaciones a los nudos de la estructura (\*) o por ser muy pequeña su propia rigidez a flexión. Es decir, en un tirante de área  $\Omega$ , inercia  $I$  y luz  $L$ , se supone, en general que se cumplen las condiciones siguientes:

$$\frac{L}{E\Omega} \neq 0 \quad \text{y} \quad \frac{EI}{L} = 0$$

En algunos casos, se considera que el tirante sólo puede resistir esfuerzos axiales de tracción (cables), pero esta hipótesis implica un análisis no lineal de la estructura, por lo que no será contemplada aquí. Se supone en el resto de este capítulo que el tirante resiste esfuerzos axiales de ambos sentidos, lo que, por otra parte, corresponde a una situación normal en estructuras importantes - caso del puente atirantado de la figura 9.32-, puesto que se suelen imponer en ellos unas deformaciones de compresión iniciales - (tirantes pretensados).

---

NOTA(\*): Se supone que el tirante se une a nudos de la estructura, lo cual siempre es posible, introduciendo nudos adicionales en ésta. Recuérdese el carácter convencional de los conceptos de nudo y barra comentados en 9.1.

El análisis de una estructura reticulada con tirantes puede realizarse por uno de los dos métodos típicos del cálculo estructural siguiente: movimientos o equilibrio, y fuerzas o compatibilidad.

En el primer método, se considera que los extremos del tirante constituyen nudos de la estructura. El grado de traslacionalidad de esta estructura,  $\alpha_R$ , supuesta con todas sus barras rígidas, se incrementa, al considerar la existencia de los tirantes, en una cantidad igual al número de éstos que no son necesarios para que la estructura sea estable estáticamente. Por lo tanto, el grado de traslacionalidad  $\alpha$  de la estructura real con tirantes es:

$$\alpha = \alpha_R + \bar{N}$$

con  $\bar{N}$  el número de tirantes que pueden eliminarse sin que la estructura sea estáticamente inestable. Si  $N$  es el número total de tirantes se cumplen las condiciones:  $0 \leq N - \bar{N} \leq 3$ . El conjunto básico de estados paramétricos se deduce de acuerdo con las normas ya comentadas; en particular, se deben de incluir las correspondientes a imponer una deformación unitaria -desplazamiento longitudinal entre sus extremos- en cada uno de los  $\bar{N}$  tirantes. El estado final de la estructura es suma de una combinación lineal de los estados paramétricos y del estado (0), que se refiere al cálculo intraslacional de las acciones sobre la estructura. Las ecuaciones de equilibrio -de fuerzas -cortantes y axiles en general- se plantean según lo indicado anteriormente en este capítulo. Con respecto a los esfuerzos axiles de los  $\bar{N}$  tirantes, que intervienen en las ecuaciones de equilibrio, se obtienen simplemente como producto de su rigidez a la extensión  $(\frac{E\Omega}{L})$  por el alargamiento que sufre (que constituye una incógnita o combinación de incógnitas del cálculo). Los esfuerzos totales se calculan como suma de los  $(\alpha+1)$  estados anteriores, e igualmente para los movimientos relativos entre nudos de la estructura sin embargo, para la determinación de los movimientos absolutos es preciso añadir



a los relativos producidos por la deformación de los  $(N-\bar{N})$  tirantes de apoyo isostático de la estructura, supuesta ésta un sólido - rígido -sin deformación interna. Este movimiento adicional de sólido rígido está constituido, en el caso más general, por una rotación y dos traslaciones que se definen por los alargamientos de los  $N-\bar{N}$  tirantes de apoyo isostático y los apoyos rígidos que puedan existir. Más adelante, con los ejemplos, se ilustran estas ideas.

El otro método de cálculo que se comenta corresponde al de las fuerzas o compatibilidad. En esencia, consiste en suprimir los  $\bar{N}$  cables (hiperestáticos), y calcular la estructura resultante sometida a la acción de las cargas existentes y las reacciones isostáticas que aparecen en los apoyos -elásticos o tirantes, y rígidos-, de acuerdo con las directrices de los apartados anteriores de este capítulo. Al plantear las ecuaciones de equilibrio de fuerzas en la estructura sin tirantes hiperestáticos, que es en general traslacional (\*), se deben incluir las fuerzas reacciones axiales - de estos tirantes, que serán función (lineal) de los movimientos o incógnitas del análisis traslacional. En efecto, se debe observar que la deformación axial, o movimiento relativo entre los extremos del tirante, según su dirección, puede obtenerse en la estructura como suma de la procedente del estado (0) de las cargas y de la combinación lineal de los estados paramétricos de la estructura sin los  $\bar{N}$  tirantes hiperestáticos. En la determinación de estas deformaciones axiales no es preciso incluir el movimiento de sólido rígido debido al movimiento de los apoyos elásticos - $(N-\bar{N})$  tirantes isostáticos-, que sólo sirve para obtener los valores absolutos de los movimientos de la estructura. Este método de compatibilidad no exige que el tirante esté conectado a nudos de la estructura, aplicándose en casos que - una secciones de barras.

---

NOTA(\*): En otro caso, los  $\bar{N}$  tirantes hiperestáticos no serían activos y sus esfuerzos axiales serían nulos, pudiendo suprimirse - en un proyecto adecuado de la estructura.

Ejemplo 9.9. Determinar el esfuerzo axial en el tirante, de la estructura de la figura 9.33a.

Características de las barras: Sección rectangular de  $0,3 \cdot 0,2 \text{ m}^2$ , y  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}$ . El tirante tiene una sección de  $\Omega = 3 \text{ cm}^2$ , y un módulo elástico  $E_a = 2 \cdot 10^7 \text{ tm}^{-2}$ .

Constituye una estructura sin coacciones, y si se utiliza el método de las fuerzas, se observa que es una vez traslacional:  $\alpha = 1$ . El cable suprimido es hiperestático. Dada la doble anti-simetría de las cargas del estado (0) y de la deformación inicial del estado paramétrico (1), el cálculo de Cross se reduce al reparto alrededor de un nudo. En el estado (0) los nudos se encuentran en equilibrio, resultando los valores:

$$M_{32}^{(0)} = 1,5 \text{ mt.} = -M_{34}^{(0)}$$

Para el estado paramétrico se deduce, para un movimiento unitario:

$$M_{32}^{(1)} = -258 = -M_{34}^{(1)}$$

La ecuación de equilibrio se escribe (figura 9.33c):

$$Q_{21} + Q_{34} - T \cdot \cos \alpha = 0 \quad \text{con} \quad T = \frac{E_a \Omega}{L} \lambda \cos \alpha$$

es decir

$$Q_{21} + Q_{34} - \lambda \frac{E_a \Omega}{L} \cos^2 \alpha = 0$$

con

$$\frac{E_a \Omega}{L} = \frac{3 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^7}{5} = 1,2 \cdot 10^3$$

Por consiguiente:

$$2(1 - 172\lambda) - 1,2 \cdot 10^3 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \lambda = 0$$

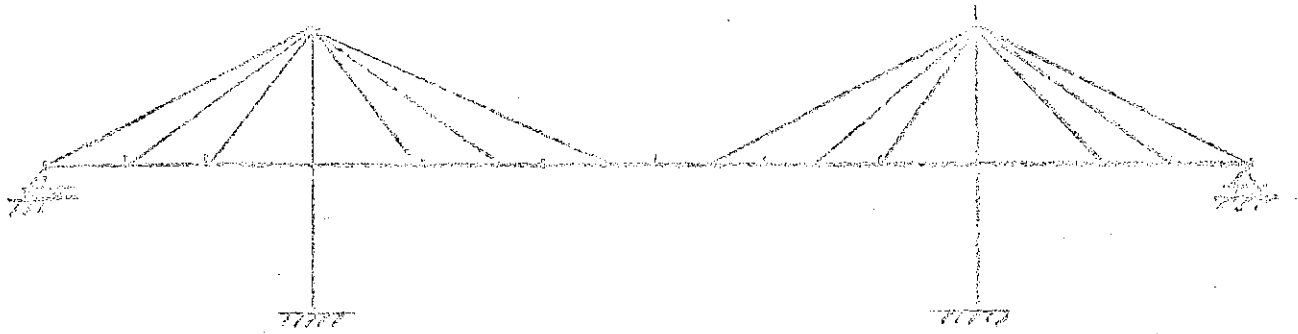


Figura 9.32. Estructura con tirantes.

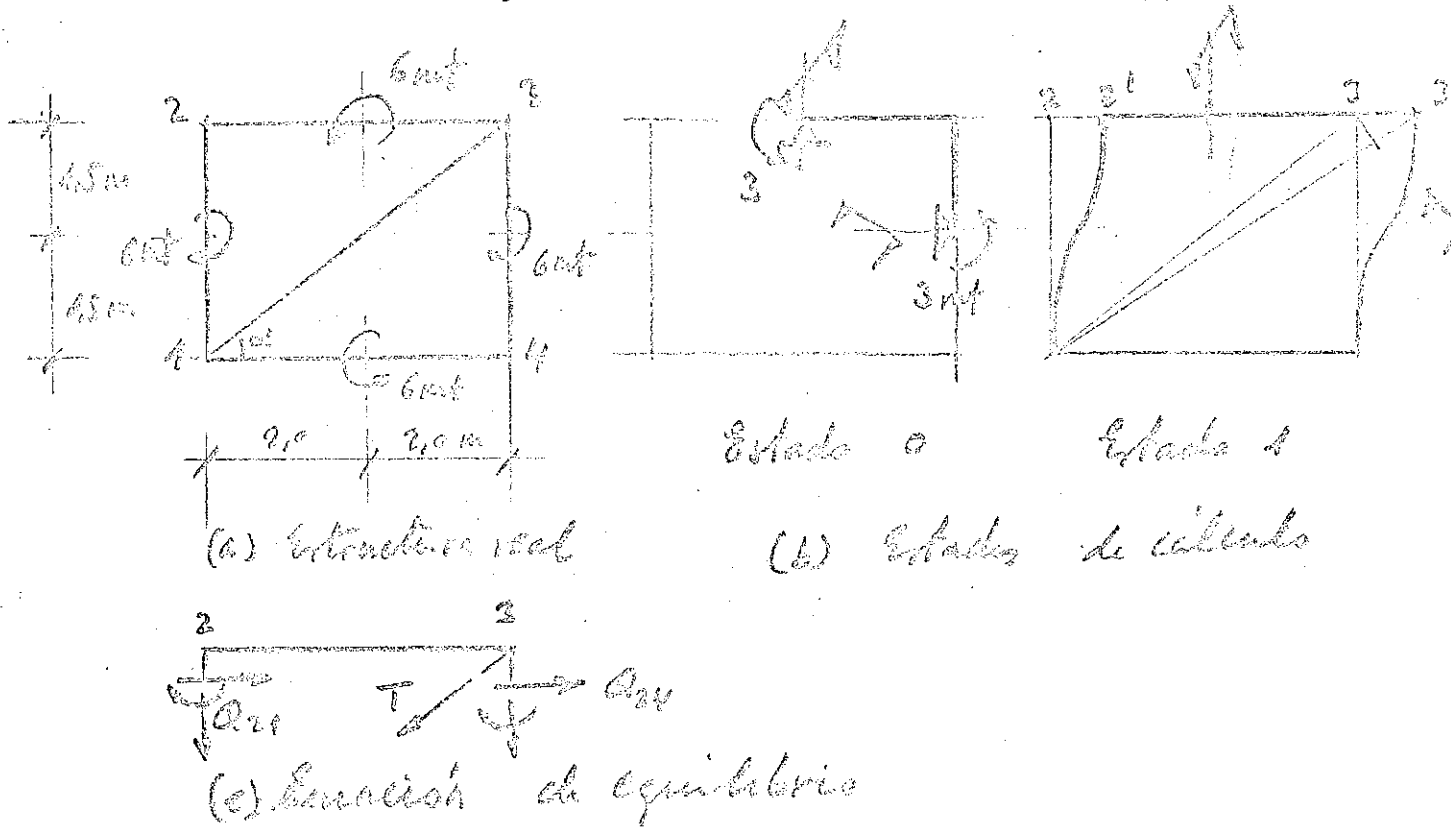


Figura 9.33. Ejemplo 9.9.

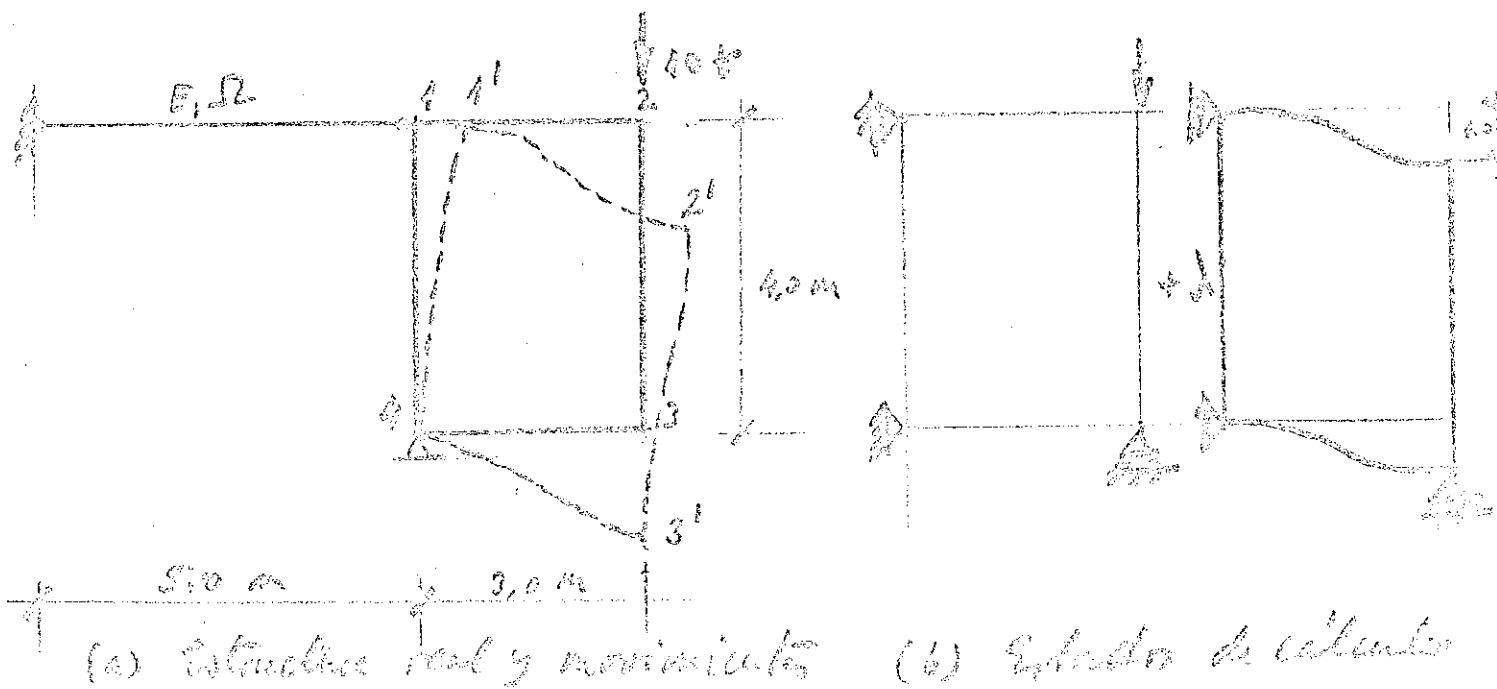


Figura 9.34. Ejemplo 9.10.

con lo que resulta:

$$\lambda = 0,0013 \text{ m} \quad \text{y} \quad T = 5,18 \text{ t}$$

Ejemplo 9.10. Calcular los movimientos de la estructura de la figura 9.34 compuesta por los mismos elementos que la del ejemplo 9.9.

Representa un caso de estructura sustentada isostáticamente por un tirante. El esfuerzo  $T$  en éste se calcula por la estática, resultando:

$$T = 10 \frac{3}{4} = 7,5 \text{ t.}$$

y por lo tanto su alargamiento es conocido y vale:

$$\Delta_{01} = \frac{TL}{E\Omega} = 6,25 \cdot 10^{-3}$$

Este alargamiento no produce esfuerzos en las restantes barras de la estructura, únicamente un movimiento general de sólido rígido rotación alrededor del nudo 4 de valor:

$$\omega = - \frac{6,25}{4} 10^{-3} = -1,31 \cdot 10^{-3} \text{ radianes}$$

La estructura es traslacional de grado 1, con cargas conocidas. El estado (0) produce momentos nulos y el estado (1) ha sido calculado en el ejemplo 9.9. Los resultados finales se deducen una vez determinado el desplazamiento vertical  $\lambda$  de los nudos 2 y 3, a partir de la ecuación de equilibrio siguiente:

$$2(-172\lambda) + 10 = 0 ; \quad \lambda = 0,029 \text{ m.}$$

Y los momentos se distribuyen antimétricamente con valor  $M_{32} = -M_{34} = -258\lambda = -7,5 \text{ mt.}$

Los desplazamientos de todos los nudos son (en mm):

$$u_1 = 6,2 ; \quad v_1 = 0$$

$$u_2 = 6,2 ; \quad v_2 = -29,0 - 3\omega = -32,9$$

$$u_3 = 0 ; \quad v_3 = -29,0 - 3\omega = -32,9$$

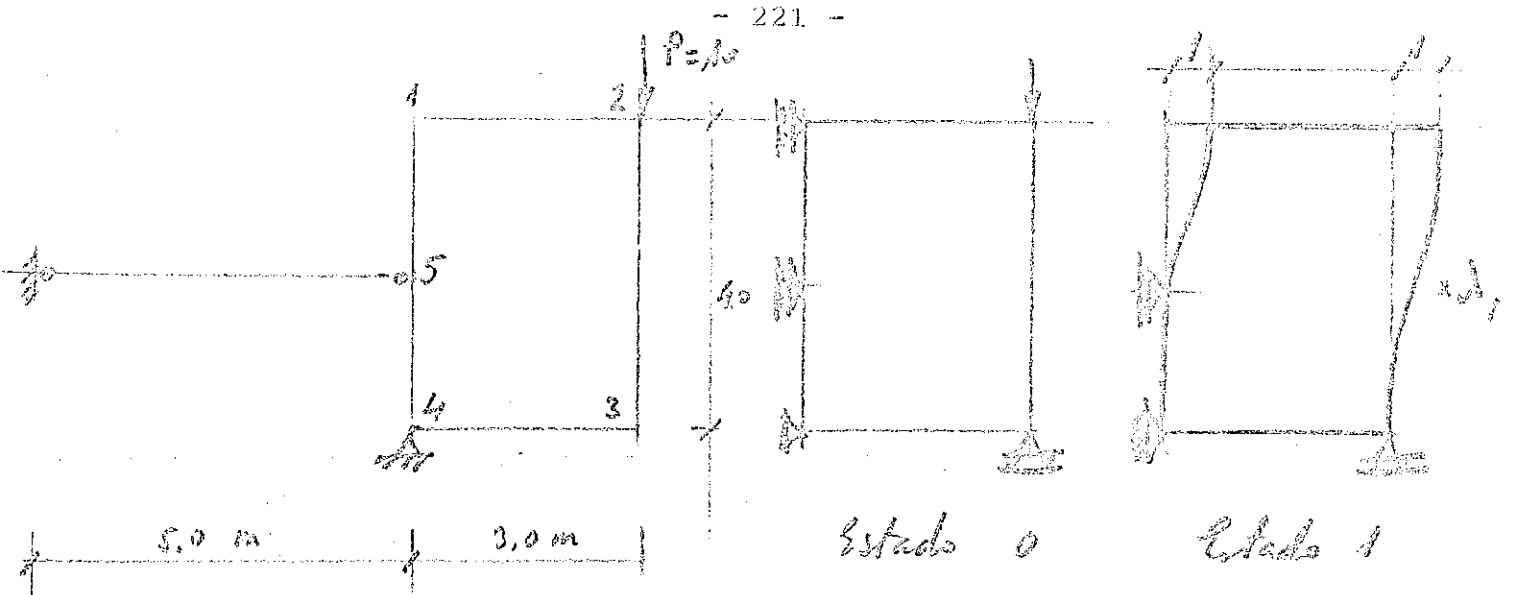
Ejemplo 9.11. Una estructura análoga a la anterior, con un tirante que sirve de sustentación isostática, pero unido a la sección central de una barra, en lugar de a un nudo, se representa en la figura 9.35a.

Calcular los momentos en los extremos de las barras y movimientos de los nudos.

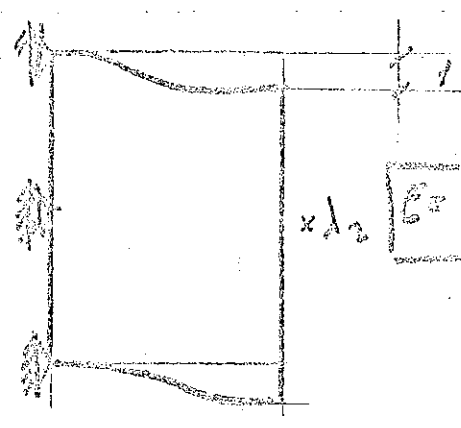
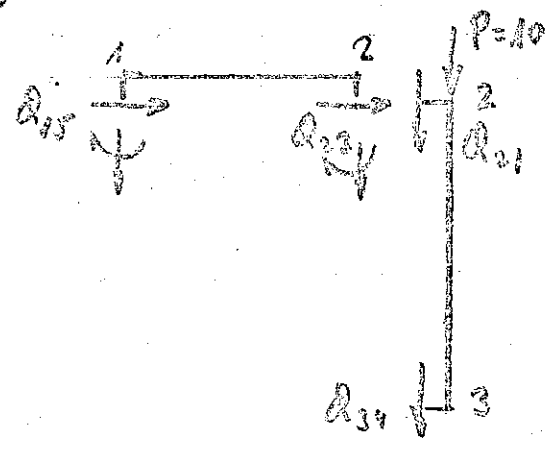
Existe la posibilidad de tratar este problema de un modo - semejante al ejemplo anterior, considerando ahora una estructura con cinco nudos y por lo tanto con dos estados paramétricos (figura 9.35b). Este método de equilibrio conduce a un estado (0) que no produce momentos, puesto que las cargas actúan en los nudos de la estructura, y a otros dos estados procedentes de los movimientos paramétricos, que se calculan mediante el método de Cross en las tablas 9.14 y 9.15.

TABLA 9.14. Cálculo estado (1).

NUDO	1	2			3		4		5	
BARRA	1-5	1-2	2-1	2-3	3-2	3-4	4-3	4-5	5-4	5-1
R	2EI	$\frac{4}{3}EI$	$\frac{4}{3}EI$	EI	EI	$\frac{4}{3}EI$	$\frac{4}{3}EI$	2EI	2EI	2EI
k	0,600	0,400	0,571	0,429	0,429	0,571	0,400	0,600	0,500	0,500
M <sup>0</sup>	1350	-	-	338	338	-	-	-	-	1350
M <sup>1</sup>	-810	-540	-193	-145	-145	-193	-	-	-675	-675
M <sup>2</sup>	-338	-96	-270	-73	-73	0	-96	-338	0	-405
M <sup>3</sup>	260	174	196	147	31	42	174	260	202	202
M	462	-462	-267	267	151	-151	-78	78	-473	473

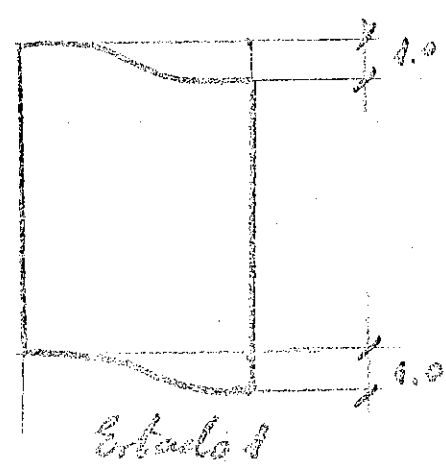
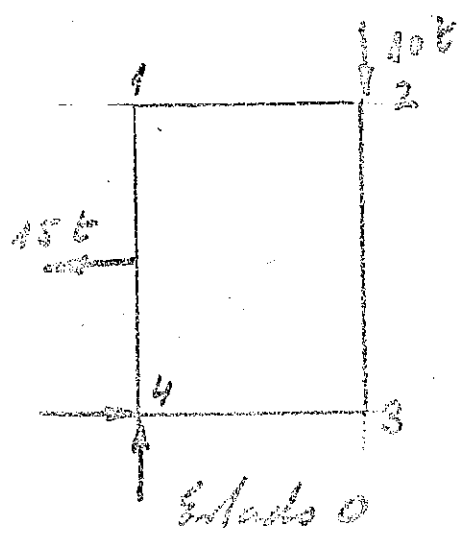


(a) Estructura real



(a) Ecuaciones de equilibrio.  
Método de equilibrio.

(b) Estados de cálculo.  
Método de equilibrio.



(d) Estados de cálculo. Método de compatibilidad

Figura 9.35. Ejemplo 9.11.

TABLA 9.15. Cálculo estado (2)

NUDO	1		OBSERVACIONES
BARRA	1-5	1-2	Antimétrico según dos direcciones
R	$\frac{3}{2}EI$	2EI	
k	0,429	0,571	
M <sup>0</sup>	-	600	
M <sup>1</sup>	-218	342	
M	-258	258	

Las ecuaciones de equilibrio son (figura 9.35c):

$$Q_{21} + Q_{34} + 10 = 0$$

$$Q_{15} = Q_{23} = 0$$

que conducen a los valores de los movimientos:

$$\lambda_1 = 0,023 \quad ; \quad \lambda_2 = 0,050$$

Los momentos en los extremos de las barras son, por consiguiente:

Barras    1-5   1-2   2-1   2-3   3-2   3-4   4-3   4-5   5-4   5-1

Momento -2,46 2,46 6,87 -6,87 -9,49 9,49 11,14 -11,14 -10,69 -10,69

y los movimientos de los nudos deben de incrementarse en los producidos por la rotación  $\omega$  alrededor del nudo 4, cuyo valor es:

$$\omega = - \frac{\Delta_{05}}{L_{45}} = - \frac{1}{2} 12,50 \cdot 10^{-3} = -6,25 \cdot 10^{-3} \text{ radianes}$$

con lo que resultan los movimientos siguientes (en mm):

$$u_1 = \lambda_1 - 4\omega = 48 ; \quad v_1 = 0$$

$$u_2 = \lambda_1 - 4\omega = 48 ; \quad v_2 = -\lambda_2 + 3\omega = 69$$

$$u_3 = 0 ; \quad v_3 = -\lambda_3 + 3\omega = 69$$

$$u_4 = 0 ; \quad v_4 = 0$$

$$u_5 = -2\omega = 12,5 ; \quad v_5 = 0$$

El otro método alternativo corresponde a un planteamiento en compatibilidad y presenta la ventaja de considerar únicamente un estado paramétrico en la estructura de 4 nudos, que se representa en la figura 9.35d. Los dos cálculos de Cross se llevan a cabo en la tabla 9.16.

La ecuación de equilibrio es:

$$Q_{21} + Q_{34} + 10 = 0; \quad -344\lambda_1 + 10 = 0$$

es decir

$$\lambda_1 = 0,02907 \text{ m.}$$

Los resultados de los momentos en los extremos de barras son:

Barras	1-4	1-2	2-1	2-3	4-1	4-3	3-4	3-2
M	-2,05	2,05	6,75	-6,75	-12,95	12,95	8,25	-8,25



TABLA 9.16. Cálculo de Cross. Estados (1) y (2).

NUDO	1		2		OBSERVACIONES
BARRA	1-4	1-2	2-1	2-3	
R	$\frac{1}{2}EI$	$\frac{4}{3}EI$	$\frac{4}{3}EI$	$\frac{1}{2}EI$	Estado (0)  Simétrico
k	0,273	0,727	0,727	0,273	
M <sup>0</sup>	7,50	0	0	0	
M <sup>1</sup>	-2,05	-5,45	0	0	
M <sup>2</sup>	0	0	-2,73	0	
M <sup>3</sup>	0	0	1,98	0,75	
M	5,45	-5,45	-0,75	0,75	
R	$\frac{3}{2}EI$	2EI			Estado (1)  Antimétrico  según dos ejes.
k	0,429	0,571			
M <sup>0</sup>	0	600			
M <sup>1</sup>	-258	-342			
M	-258	258			

Para conocer el giro de sólido rígido de la estructura, es preciso calcular la flecha del extremo del cable (sección 5).

$$u_5 = -\frac{PL^3}{48EI} + 0,375 \frac{(-M_{14} + M_{41})}{6EI} L^2 = -15 \frac{4^3}{48 \cdot 900} + 0,375 \frac{10,90 \cdot 4^2}{6 \cdot 900}$$

es decir:  $u_5 = -0,0220 + 0,0121 = -0,0101$

el giro  $\omega$  de la estructura es tal que compatibiliza las flechas del cable y estructura, es decir:

$$u_5 - \omega \frac{L_{14}}{2} = T\left(\frac{L}{E\Omega}\right)_{05}$$

$$-0,0101 - \omega \cdot 2 = 12,5 \cdot 10^{-3}$$

$$\omega = -12,3 \cdot 10^{-3} \text{ radianes}$$

Los movimientos de los nudos son (en mm):

$$u_1 = -4\omega = 49 ; \quad v_1 = 0$$

$$u_2 = -4\omega = 49 ; \quad v_2 = -\lambda_1 + 3\omega = 66$$

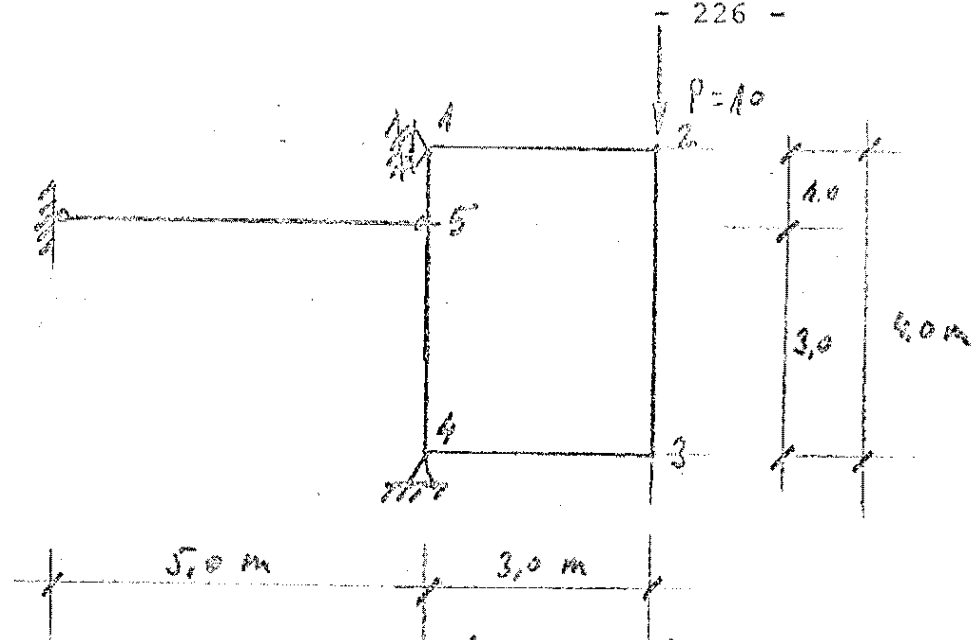
$$u_3 = 0 ; \quad v_3 = -\lambda_1 + 3\omega = 66$$

$$u_4 = 0 ; \quad v_4 = 0$$

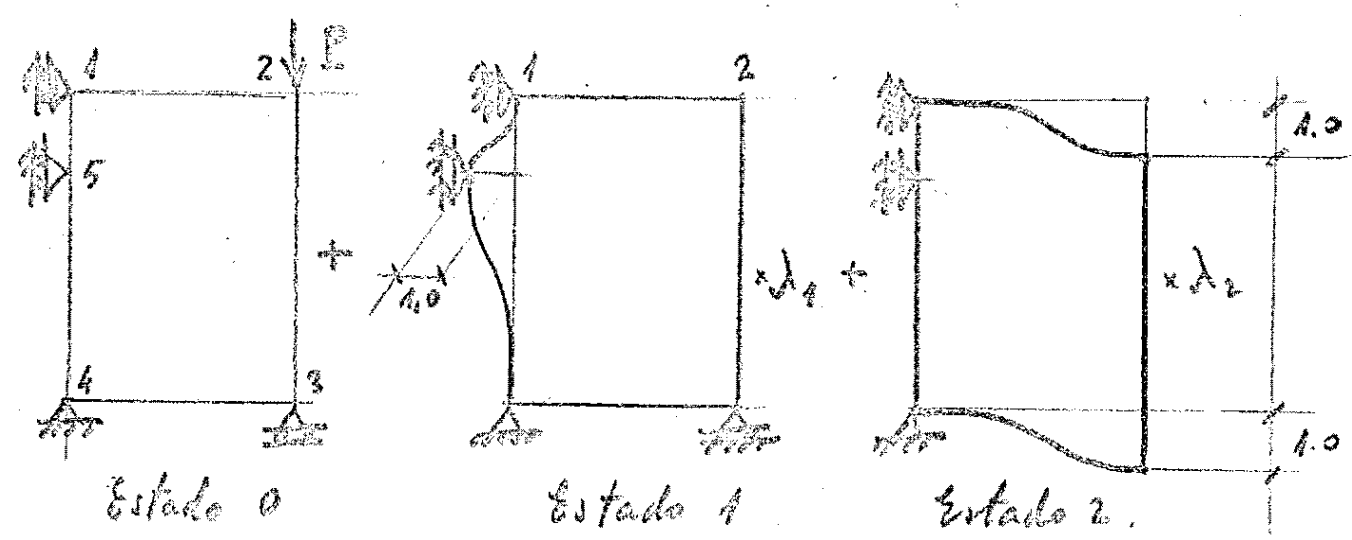
$$u_5 = 12,5 ; \quad v_5 = 0$$

Ejemplo 9.12. Se trata ahora de una estructura idéntica a la del ejemplo 9.9, pero con un cable que no constituye sustentación isostática de la misma. A efectos de comparar ambos procedimientos (equilibrio y compatibilidad) en un caso general, se supone que el cable se conecta a una sección intermedia de una barra. Se desea obtener los movimientos en todos los nudos (figura 9.36a).

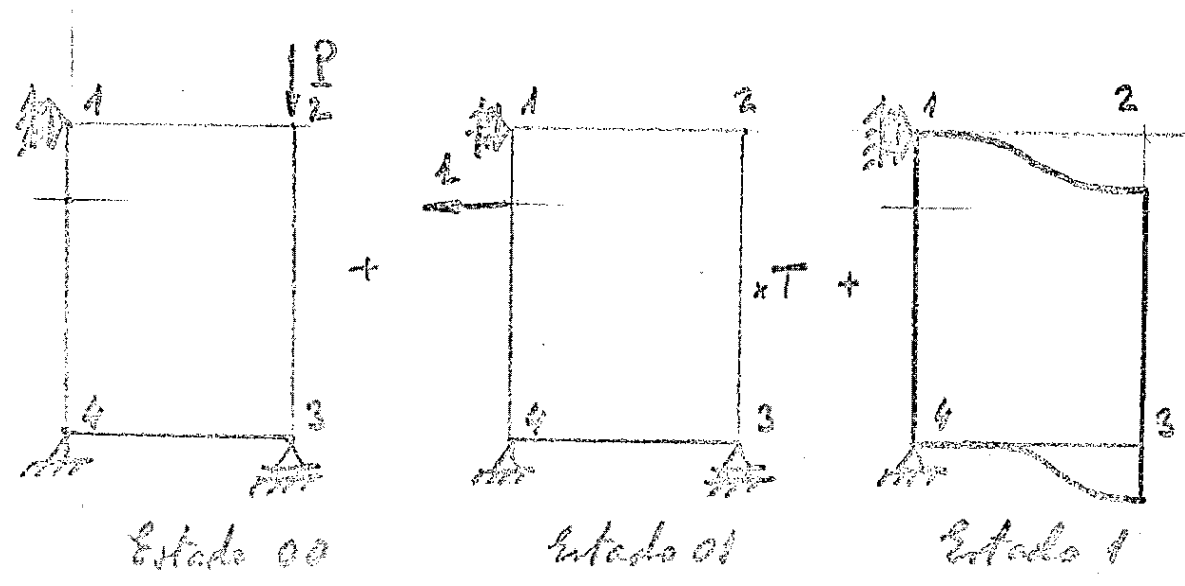
El procedimiento en equilibrio exige considerar como nudos de la estructura los extremos del tirante, por lo que en este caso existen cinco nudos y el grado de traslacionalidad es dos. El estado intraslacional conduce a resultados en momentos nulos, ya que las cargas están aplicadas en los nudos. Los dos estados paramétricos se representan en la figura 9.36b y se calculan en la tabla 9.17. En ellos se ha supuesto  $100X_i = \frac{6EI}{9} \lambda_i$ , con  $\lambda_i$  el movimiento del estado paramétrico  $i$ .



(a) Estructura real.



(b) Estados de cálculo. Método de equilibrio.



(c) Estados de cálculo. Método de compatibilidad.

Figura 9.36. Ejemplo 9.12.

TABLA 9.17. Cálculo de los estados. Método de equilibrio.

NUDO	1		2		3		4		5	
BARRA	1-5	1-2	2-1	2-3	3-2	3-4	4-3	4-5	5-4	5-1
R/EI	4	4/3	4/3	1	1	4/3	4/3	4/3	4/3	4
k	0,75	0,25	0,57	0,43	0,43	0,57	0,5	0,5	0,25	0,75
M <sup>0</sup>	0	100	100	0	0	100	100	0	0	0
M <sup>1</sup>	-75	-25	-57	-43	-43	-57	-50	-50	0	0
M <sup>2</sup>	0	-28,5	-12,5	-21,5	-21,5	-25	-28,5	0	-25	-37,5
M <sup>3</sup>	21,4	7,1	19,4	14,6	20	26,5	14,3	14,2	15,6	46,9
M <sup>(1)</sup>	-53,6	53,6	49,9	-49,9	-44,5	44,5	35,8	-35,8	-9,4	9,4
M <sup>0</sup>	900	0	0	0	0	0	0	-100	-100	900
M <sup>1</sup>	-675	-225	0	0	0	0	50	50	-200	-600
M <sup>2</sup>	300	0	-112,5	0	0	25	0	-100	25	-337,5
M <sup>3</sup>	225	75	64,1	48,4	-10,7	-14,3	50	50	78,1	234,4
M <sup>(2)</sup>	150	-150	-48,4	48,4	-10,7	10,7	100	-100	-196,9	196,9

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$Q_{21} + Q_{34} + 10 = 0$$

$$Q_{51} + Q_{54} + T = 0$$

Sistema de ecuaciones que resulta:

$$-0,41EIA_1 + 0,19EIA_2 + 10 = 0$$

$$-0,19EIA_1 + 1,97EIA_2 + T = 0$$

con  $EI = 900$  y  $T = \left(\frac{E\Omega}{L}\right) 0,05\lambda_2 = 1200\lambda_2$

17



La condición de compatibilidad del desplazamiento del punto 5 es:

$$f_5^{(00)} + T f_5^{(01)} + \lambda f_5^{(1)} = -T \left( \frac{L}{E\Omega} \right)_{05}$$

La ecuación de equilibrio es:

$$Q_{21} + Q_{34} + 10 = 0$$

Las ecuaciones que resultan son:

$$12,10 \cdot 10^{-4} T = 7,2 \cdot 10^{-2} \lambda$$

$$10 - 0,071T - 344\lambda = 0$$

cuya solución es:

$$T = -1,7087 \text{ toneladas (compresión).}$$

$$\lambda = 0,029 \text{ m.}$$

Los resultados finales son:

$$R = R^{(0)} + \lambda R^{(1)}$$

con  $R^{(0)} = R^{(00)} + T R^{(01)}$

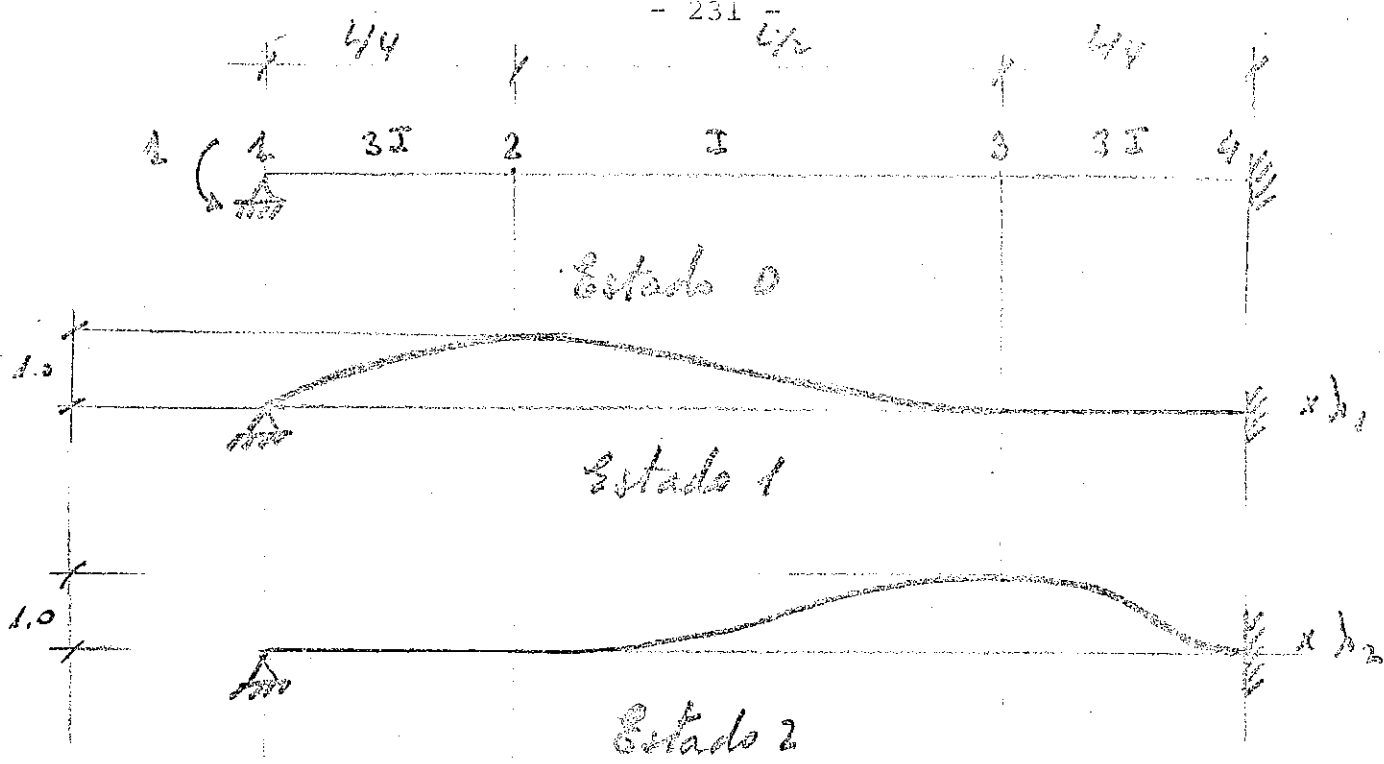
Se comprueba que ambos métodos conducen a resultados análogos. Se observa que el método de equilibrio permite obtener a veces ventajas de planteamiento de las ecuaciones, a costa de un incremento del número de nudos de la estructura. En el procedimiento de compatibilidad la estructura es más simple, pero exige la determinación, a veces enojosa, de las flechas de la ecuación de compatibilidad.

De los ejemplos anteriores se deduce que el método de equilibrio exige el cálculo de estructuras con un número mayor de nudos -si el tirante no se encuentra conectada a nudos ya existentes de la estructura- y por lo tanto con un mayor grado de traslacionalidad - que en el método de compatibilidad. Sin embargo, en este último es preciso llevar a cabo varios análisis intraslacionales correspondientes a los esfuerzos unitarios en cada tirante, con objeto de calcular las flechas que intervienen en las ecuaciones de compatibilidad. Por otra parte, en el método de equilibrio las condiciones que permiten obtener los movimientos de todos los nudos son mas simples de plantar que los de compatibilidad. Parece por lo tanto mas recomendable en un caso general, el método de los movimientos o del equilibrio - para el análisis de estructuras atirantadas.

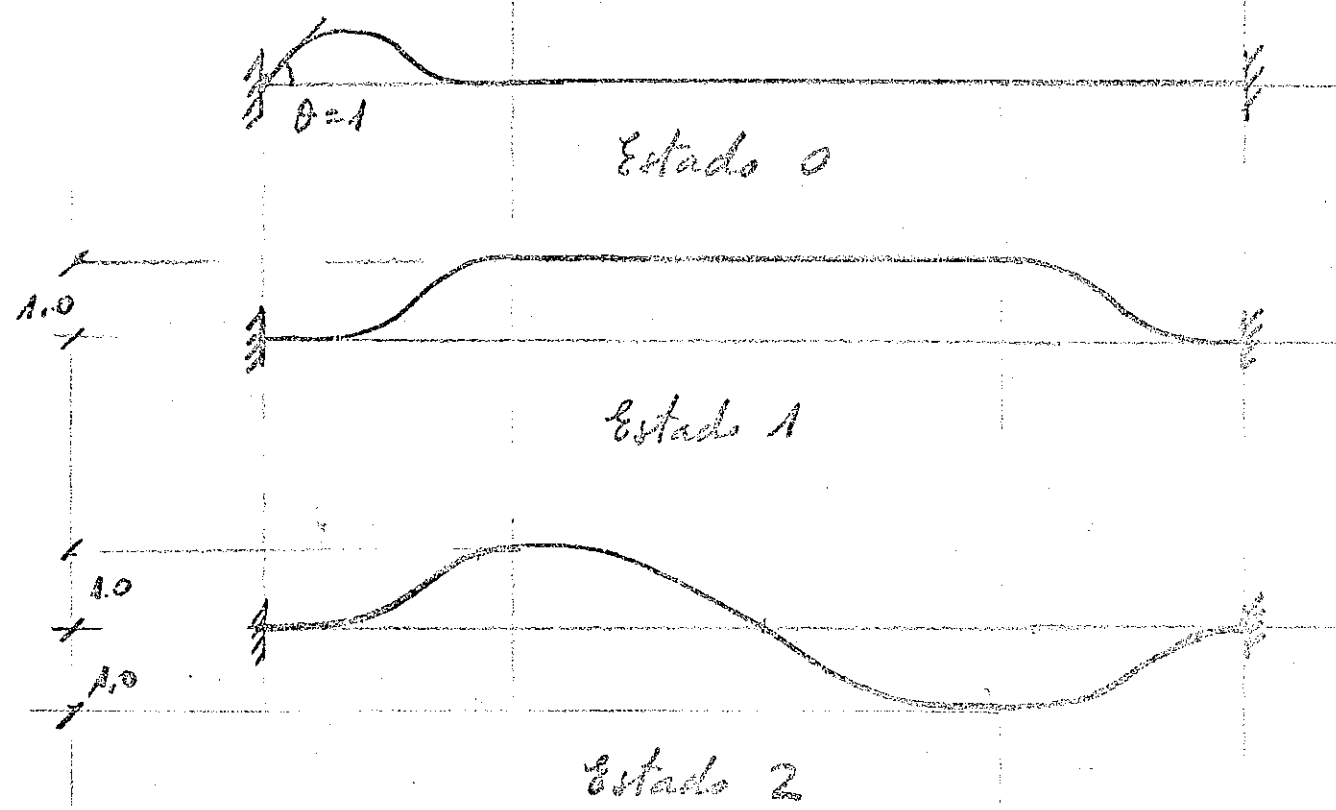
#### 9.6. SUBESTRUCTURAS

Como se desprende del desarrollo teórico de este capítulo, los conceptos de barra y nudos son relativos. Se puede descomponer una barra en varias mediante la inserción de nudos intermedios. La conveniencia de este procedimiento depende de varios factores, ya que si bien puede simplificar las constantes características de las barras que intervengan en el cálculo, éste se complica. Por el contrario existe el proceso de agrupar varias barras en serie e incluso estructuras articuladas y reticuladas en barras ficticias o subestructuras, siempre que se encuentren conectadas al resto de la estructura mediante dos nudos. (La extensión a varios nudos se puede llevar a cabo mediante técnicas de cálculo matricial como se verá mas adelante). Las características elastomecánicas de las barras o subestructuras se determinan mediante la aplicación de los conceptos de rigidez, coeficiente de transmisión, elongabilidad, etc. descritos anteriormente. A veces la determinación de estas características puede exigir, o hacer conveniente, la resolución de un cálculo estructural.

Ejemplo 9.13. Determinar las características elastomecánicas de la barra del ejemplo 7.3. mediante el método de Cross.



(a) Estructura liberada.



(b) Estructura bien fijada.

Figura 9.37. Ejemplo 9.13.



Se supone la barra apoyada en un extremo y empotrada en el otro, sometida a un momento unidad en el extremo articulado con objeto de obtener las características pedidas. La estructura así considerada, con cuatro nudos, es traslacional de grado 2 (figura 9.37a). - Los estados paramétricos se describen y calculan en la tabla 9.19.

TABLA 9.19. Cálculo de Cross.

NUDO	2		3		OBSERVAC.
BARRA	2-1	2-3	3-2	3-4	
R	$\frac{36EI}{L}$	$\frac{8EI}{L}$	$\frac{8EI}{L}$	$\frac{36EI}{L}$	
k	0,818	0,182	0,182	0,818	
M <sup>0</sup>	0,500	-	-	-	
M <sup>1</sup>	-0,409	-0,091	-	-	Estado (0)
M <sup>2</sup>	-	-	-0,046	-	
M <sup>3</sup>	-	-	0,008	0,038	
M <sup>4</sup>	-	0,004	-	-	
M <sup>5</sup>	-0,003	-0,001	-	-	
M	0,088	-0,088	-0,038	0,038	
M <sup>0</sup>	-144	24	24	0	Estado (1)
M <sup>1</sup>	98	22	-4	-20	
M <sup>2</sup>	-	-2	11	-	
M <sup>3</sup>	2	0	-2	-9	
M	-44	44	29	-29	

TABLA 9.19. Continuación.

$M^{(0)}$	-	-24	-24	288	Estado (2)
$M^1$	20	4	-48	-216	
$M^2$	-	-24	2	-	
$M^3$	20	4	-	-2	
$M$	40	-40	-70	70	

Por otra parte, se obtienen los valores del momento en el extremo empotrado, en cada uno de los estados de carga:

$$M_{43}^{(0)} = 0,019 ; \quad M_{43}^{(1)} = -15 \quad \text{y} \quad M_{43}^{(2)} = 179$$

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$-Q_{21} + Q_{23} = 0$$

$$-Q_{32} + Q_{34} = 0$$

$$\text{es decir } 4(1,088 - 44X_1 + 40X_2) - 2(-0,126 + 73X_1 - 110X_2) = 0$$

$$2(-0,126 + 73X_1 - 110X_2) - 4(0,057 - 44X_1 - 249X_2) = 0$$

$$4,604 - 322X_1 + 380X_2 = 0$$

$$-0,480 + 322X_1 - 1216X_2 = 0$$

La solución del sistema anterior es:

$$X_1 = 0,02012 \quad \text{y} \quad X_2 = 0,00493$$

Por lo tanto, resulta:

$$M_{21} = M_{21}^{(0)} + X_1 M_{21}^{(1)} + X_2 M_{21}^{(2)} = -0,599$$

$$M_{43} = M_{43}^{(0)} + X_1 M_{43}^{(1)} + X_2 M_{43}^{(2)} = 0,600 = \gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} = \left( \frac{0,599}{6} + \frac{1}{3} \right) \frac{L}{4EI} = 0,10833 \frac{L}{EI}$$

$$R = 9,230 \frac{EI}{L}$$

que son valores que coinciden, dentro de la aproximación llevada a cabo en los cálculos, con los obtenidos en el ejemplo 7.3.

Existe la posibilidad de suponer biempotrada la barra y producir un giro unidad en un extremo. La rigidez representa el momento final que se produce en el empotramiento y el coeficiente de transmisión corresponde a la relación de momentos de empotramiento. La ventaja de este procedimiento reside en que la estructura es simétrica y simplificaciones en el cálculo son posibles, como se indica en la figura 9.37b. Los sucesivos cálculos de Cross de la estructura se resumen en la tabla 9.20.

Los momentos de los valores empotrados son:

$$M_{12}^{(0)} = (48-10) \frac{EI}{L} = 38 \frac{EI}{L} ; \quad M_{12}^{(1)} = -155 \quad \text{y} \quad M_{12}^{(2)} = -192$$

$$M_{43}^{(0)} = 0 ; \quad M_{43}^{(1)} = 155 \quad \text{y} \quad M_{43}^{(2)} = -192$$

TABLA 9.20. Cálculo de Cross.

NUDO	2		3		OBSERVACIONES
BARRA	2-1	2-3	3-2	3-4	
R	$\frac{48EI}{L}$	$\frac{8EI}{L}$	$\frac{8EI}{L}$	$\frac{48EI}{L}$	Estado (0)  $\times \frac{EI}{L}$
k	0,857	0,143	0,143	0,857	
M <sup>0</sup>	24	-	-	-	
M <sup>1</sup>	-21	-3	-	-	
M <sup>2</sup>	-	-	-2	-	
M <sup>3</sup>	-	-	1	1	
M	3	-3	-1	1	
R	$\frac{48EI}{L}$	$\frac{4EI}{L}$			Estado (1) Simétrico  $\times \frac{EI}{L}$
k	0,923	0,077			
M <sup>0</sup>	-288	-			
M <sup>1</sup>	266	22			
M <sup>2</sup>	-22	22			
R	$\frac{48EI}{L}$	$\frac{12EI}{L}$			Estado (2) Antimétrico  $\times \frac{EI}{L}$
k	0,800	0,200			
M <sup>0</sup>	-288	48			
M <sup>1</sup>	192	48			
M	-96	96			

Las ecuaciones de equilibrio son iguales a las del procedimiento anterior y resulta:

$$4(41 - 177X_1 - 288X_2) - 2(-4 + 0X_1 + 192X_2) = 0$$

$$2(-4 + 0X_1 + 192X_2) - 4(0 + 177X_1 - 288X_2) = 0$$

$$170 - 708X_1 - 1536X_2 = 0 \quad X_1 = 0,114$$

$$-8 - 708X_1 + 1536X_2 = 0 \quad X_2 = 0,058$$

Los momentos en los bordes son:

$$M_{12} = M_{12}^{(0)} + X_1 M_{12}^{(1)} + X_2 M_{12}^{(2)} = 9,142 \frac{EI}{L}$$

$$M_{34} = M_{34}^{(0)} + X_1 M_{34}^{(1)} + X_2 M_{34}^{(2)} = 6,608 \frac{EI}{L}$$

luego

$$R = 9,142 \frac{EI}{L} = M_{12}$$

$$\gamma = \frac{M_{12}}{M_{34}} = 0,723$$

que coinciden prácticamente con los obtenidos con procedimientos anteriores.

Por último se presenta un ejemplo sencillo: el cálculo de una estructura susceptible de ser descompuesta en subestructuras. Como se verá en este caso, como en muchos otros, esta descomposición no es única, y la más adecuada, desde el punto de vista del cálculo, depende en gran medida de la experiencia y la intuición estructural que se posea.

para, en primer lugar, la posibilidad de obtener la estructura susceptible de ser descompuesta en subestructuras (R) mediante la deducción de la R y el correspondiente desplazamiento  $\delta$ , mediante la fórmula:  $R = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$  y  $\delta = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

Ejemplo 9.14. La estructura de la figura 9.38a está compuesta por un dintel que, por simplicidad, se supone que es una celosía plana de nudos articulados, unida mediante articulaciones fijas (sin posibilidad de deslizamiento) a unos soportes circulares de hormigón armado de módulo de elasticidad  $E_b = 2 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}$ , los cuales se prolongan en el terreno constituyendo de esta forma una cimentación por pilotes. La elongabilidad de todas las barras de la celosía es

$$\frac{L}{E\Omega_a} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m/t}$$

y el diámetro de los soportes  $\phi = 0,30 \text{ m}$ .

A efectos de simular una primera aproximación en el cálculo se supone que los soportes se extienden una longitud infinita en el terreno y que este es tipo Winkler, es decir, que reacciona en cada punto de contacto del suelo con el pilote con una fuerza de intensidad  $q$  proporcional a la flecha  $w$ . El módulo de balastao  $k$ , definido por la relación  $q = kw$  es de  $6000 \text{ tm}^{-2}$ . Se admite asimismo que los pilotes son inextensibles y están apoyados por la punta en roca firme, por lo que sus movimientos verticales son nulos (no existen asientos).

Se desean obtener para cada uno de los dos casos de acciones siguientes:

1) Incremento de 5 cm. en longitud de la barra 5-6 producido por la temperatura.

2) Una fuerza vertical descendente de 12 t en el nudo 5.

los resultados:

1) Movimientos de los nudos 1 y 5.

2) Esfuerzos en todas las barras de la celosía.

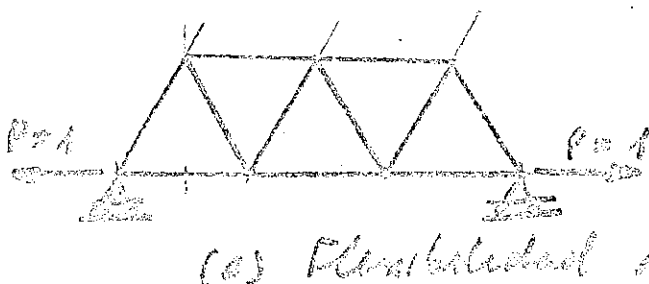
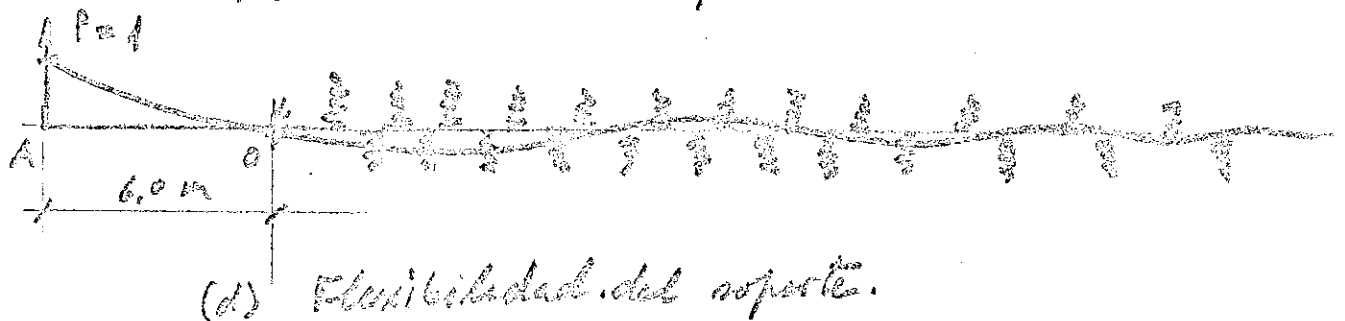
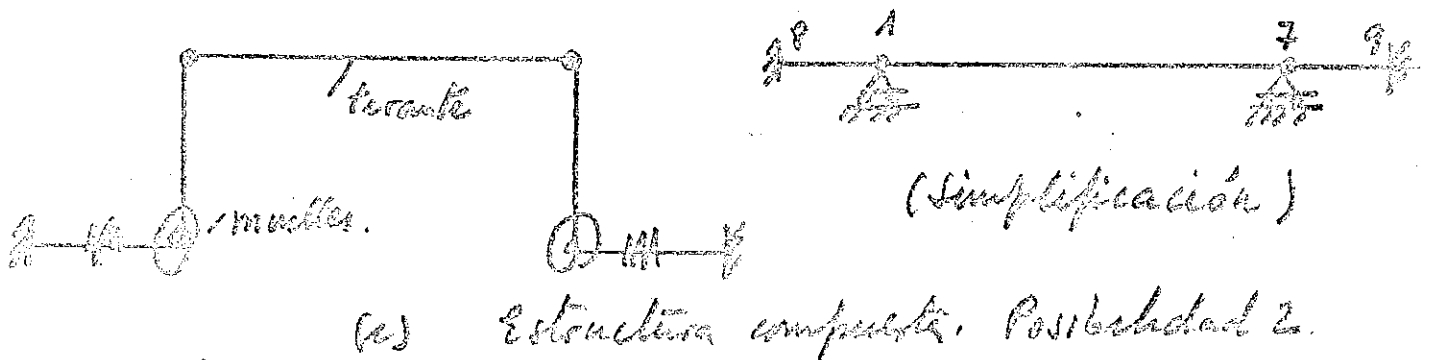
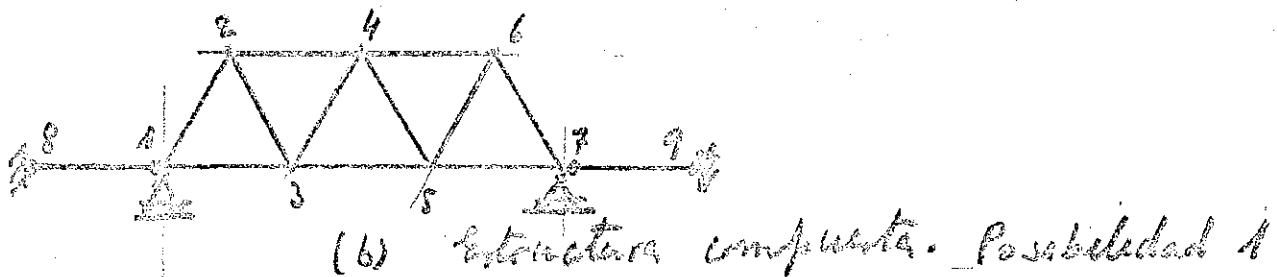
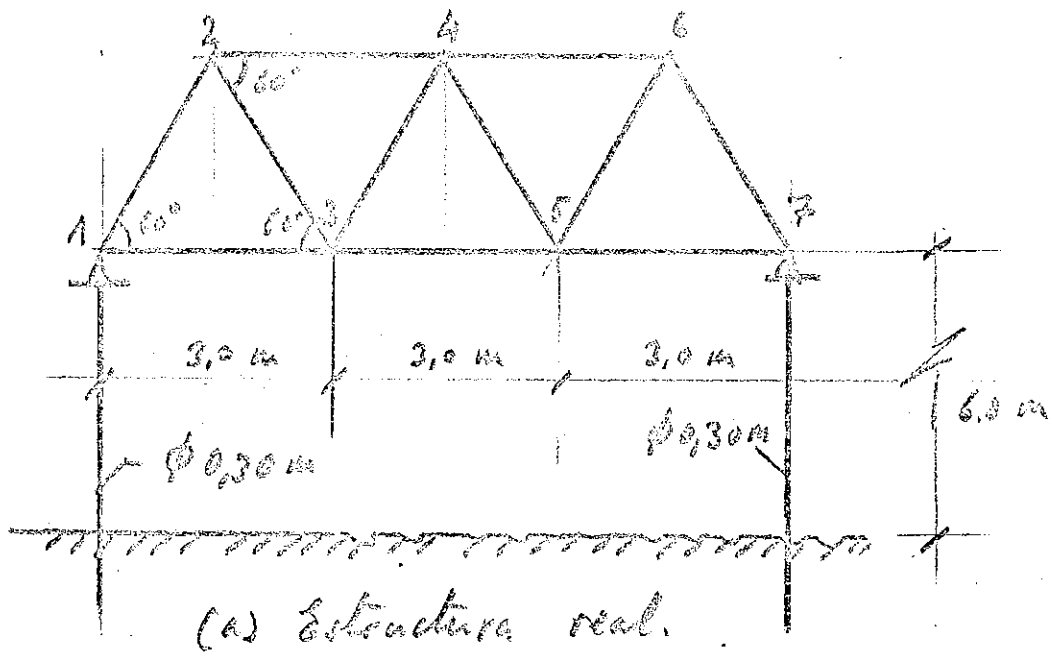


Figura 9.38. Ejemplo 9.14.

Existen dos posibilidades de tratamiento de la estructura del ejemplo, bien como una celosía con dos barras adicionales (figura - 9.38b), con flexibilidades iguales a las de cada soporte, o por el contrario como una estructura reticulada con un tirante como dintel y dos muelles elásticos (de rotación y movimiento horizontal acoplados) en su contacto en el terreno (figura 9.38c). En el primer esquema de cálculo es preciso calcular la flexibilidad del soporte. Esta se deduce a partir de la ecuación diferencial de la viga flotante:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + kw = 0 \quad (9.19)$$

con las condiciones de borde:

$$\text{Para } x = 0 \quad Q = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} = -1t \quad \text{y} \quad M = EI \frac{d^2 w}{dx^2} = 6 \text{ mt} \quad (9.20a)$$

$$\text{Para } x \rightarrow \infty \quad w' = \frac{dw}{dx} = 0 \quad (9.20b)$$

Si se denomina  $\beta^4 = \frac{k}{4EI}$ , la solución general de (9.19) es:

$$w = e^{-\beta x} (A_1 \cos \beta x + A_2 \operatorname{sen} \beta x) + e^{\beta x} (A_3 \cos \beta x + A_4 \operatorname{sen} \beta x)$$

que al considerar las condiciones (9.20b) se convierte en:

$$w = e^{-\beta x} (A_1 \cos \beta x + A_2 \operatorname{sen} \beta x)$$

y con las relaciones (9.20a) se deducen los siguientes valores de las constantes  $A_1$  y  $A_2$ :

$$A_1 = \frac{1 + 6\beta}{2\beta^3 EI} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{-3}{\beta^2 EI}$$





La tabla 9.21 se refiere al caso de carga 2, ya que para el caso 1 no existen esfuerzos en la estructura hiperestática. Por otra parte, en este caso es fácil obtener los valores siguientes de los movimientos de los nudos:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 & ; & & v_1 &= 0 \\ u_5 &= 0 & ; & & v_5 &= -3,9 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Con respecto al caso de carga 2, la condición de compatibilidad que se deduce de la tabla 9.17 es:

$$27,72 \cdot 10^{-4} + 246 \cdot 10^{-4} x = 0 ; \quad x = -0,113$$

Los esfuerzos finales en todas las barras son:

$$N^T = N^0 + xN^1$$

y se presentan en la tabla anterior.

Los movimientos de los nudos 1 y 5 son en este caso de carga:

$$\begin{aligned} u_1 &= -1,32 \text{ mm} & ; & & v_1 &= 0 \\ u_5 &= 0,5 \text{ mm} & , & & v_5 &= -7,2 \text{ mm} \end{aligned}$$

La otra posibilidad de cálculo corresponde a considerar la estructura entramado simple que se muestra en la figura 9.35c y que puede simplificarse en la compuesta de las tres barras que allí se indican.

La flexibilidad de la celosía es:

$$f = 3 \frac{L}{E_a \Omega} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m/t}$$

Para el caso de cargas 2, la solución de viga biarticulada conduce a las reacciones (tabla):

$$H_1 = -H_9 = H$$

$$\text{con } -H \cdot 6 \cdot 10^{-4} + (4,62 + 13,86 + 9,24)10^{-4} = 0$$

$$H = 4,62 \text{ t.}$$

La ecuación que determina el movimiento de los nudos 1 y 7 ( $u_1 = -u_7 = -u$ ) así como la reacción hiperestática (X) es:

$$u = \frac{1}{2}(4,62 - X)6 \cdot 10^{-4} = -X \cdot 120 \cdot 10^{-4}$$

$$X = 0,115 \text{ t.}$$

que coincide con el obtenido mediante el esquema estructural anterior.

### EJERCICIOS. ENUNCIADOS

9.1. En las tres estructuras de la figura 9.39 se desea conocer:

- 1) Grado de traslacionalidad. b) Estados parámetros básicos. c) Ecuaciones de equilibrio convenientes indicando las secciones y esfuerzos que se deberían considerar.

9.2. En el pórtico simple de la figura 9.40 indicar los casos de cargas que desplazan a los nudos así como el sentido de este movimiento.

9.3. Se considera el pórtico de la figura 9.41 constituido por un dintel simétrico de rigidez  $R_1 = R_2 = R$  y coeficiente de transmisión  $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma$  y por dos soportes idénticos de características  $R'_1, R'_2, \gamma'_{12}$  y  $\gamma'_{21}$ .

Determinar la posición o posiciones de la carga vertical  $P$  para las cuales el pórtico es intraslacional.

9.4. Las barras correspondientes de las dos estructuras 1 y 2 de la figura 9.42 son iguales. Se pide justificar en cual de las dos es mayor el desplazamiento horizontal del nudo A para la misma sollicitación  $P$ .

9.5. Obtener las reacciones en el nudo A de las dos estructuras reticuladas de la figura 9.43 cuando se encuentran sometidas a la acción de un momento de  $-10 \text{ mt.}$  aplicado en la sección central de la barra BC.

9.6. En la estructura reticulada indicada en la figura 9.44a se pide:

- 1) Esfuerzos en la rebanada media de la barra AC.
- 2) Corrimiento del nudo B.

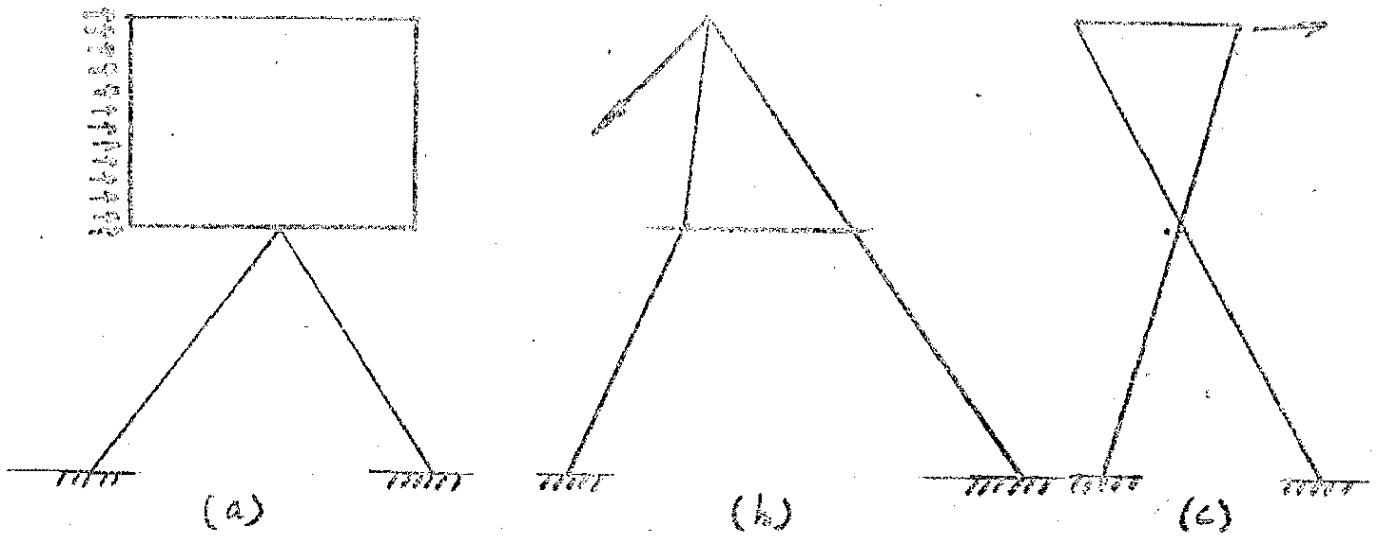


Figura 9.39. Ejercicio 9.1.

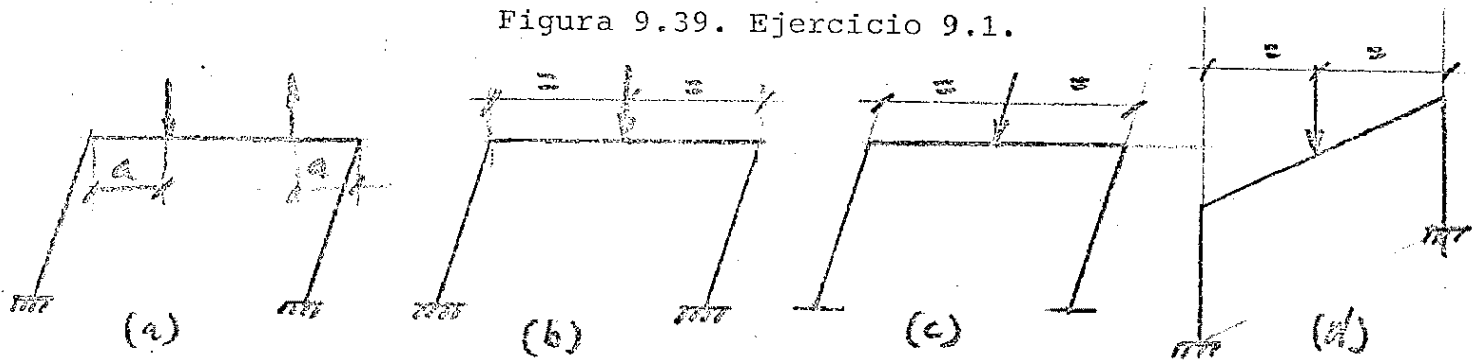


Figura 9.40 Ejercicio 9.2.

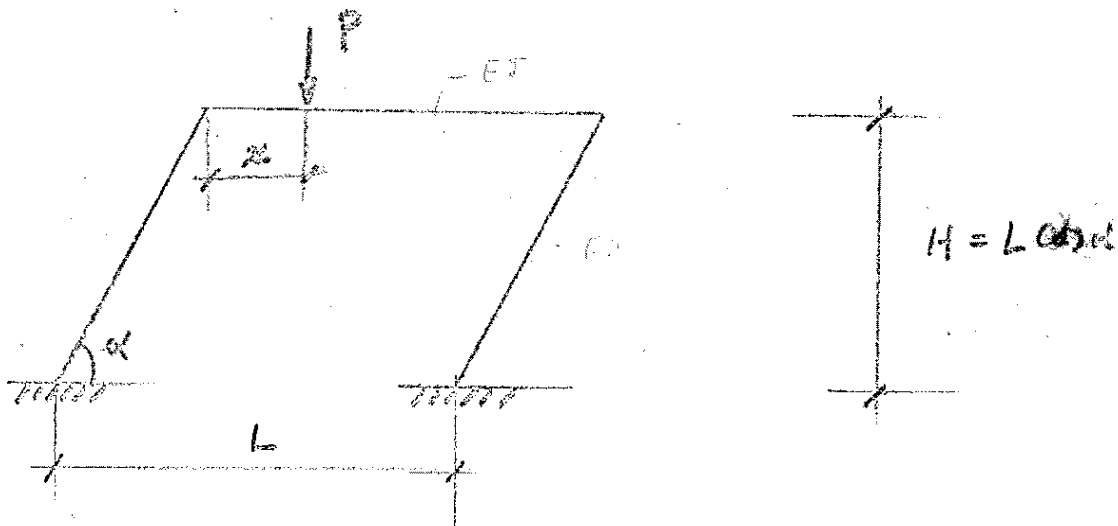


Figura 9.41. Ejercicio 9.3.

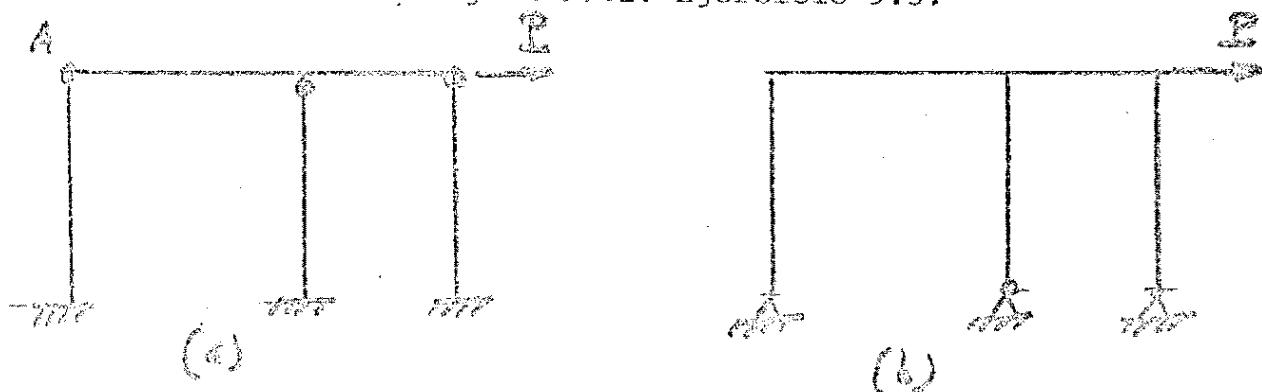


Figura 9.42. Ejercicio 9.4.

La sección de todas las barras es de 0,40 . 0,40.

$E = 200.000 \text{ Kg/cm}^2$ . Se desprecia el acortamiento de las -  
barras.

9.7. Las estructuras de la rampa indicada en la figura 9.44b se halla sometida a una carga vertical uniforme de  $2 \text{ tm}^{-1}$  (longitud medida en horizontal) extendida en todo el tramo.

Se pide:

- 1) Dibujar las leyes de esfuerzos en todas las barras, -  
acotando los valores característicos.
- 2) Movimientos en todos los nudos.

Las piezas son de sección rectangular de 0,50 x 0,20 m. y un módulo de elasticidad de  $E = 400.000 \text{ kg.cm}^{-2}$ .

Notas: Se procurará obtener las máximas simplificaciones -  
de posibles simetrías o antimetrías de la estructura.

No se considerará la deformación producida por los esfuerzos axiales.

9.8. Desplazamientos horizontales expresados en mm. de los nudos A y B para un aumento de temperatura de  $50^\circ\text{C}$ . uniforme en toda la -  
estructura de la figura 9.45.

Coefficiente de dilatación lineal del material  $10^{-5} \text{ m/m}^\circ\text{C}$ .

Sección de todas las barras 0,20 . 0,50 m.

Módulo de elasticidad del material de las barras  $10^5 \text{ Kg/cm}^2$ .

$L = 5 \text{ m}$ .

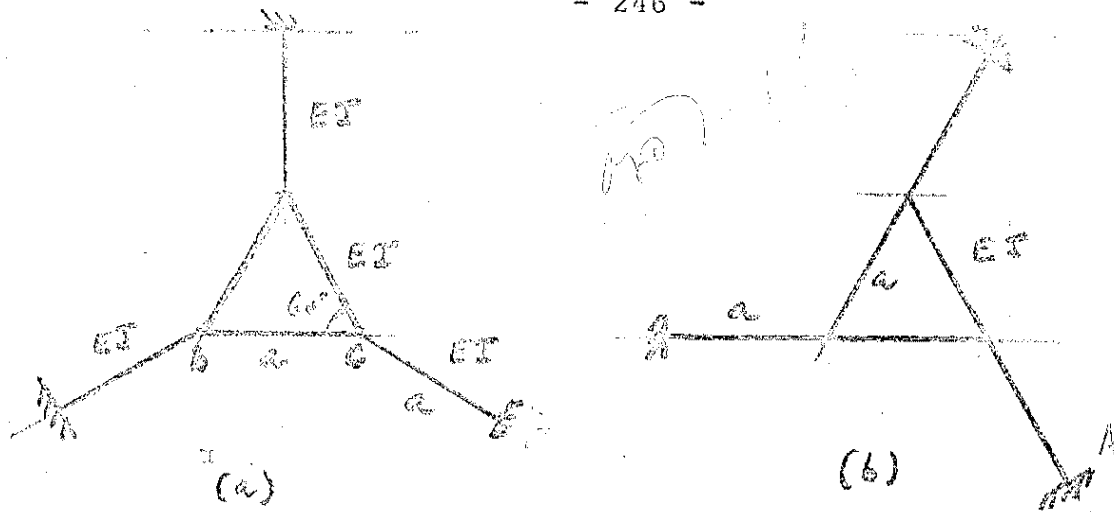
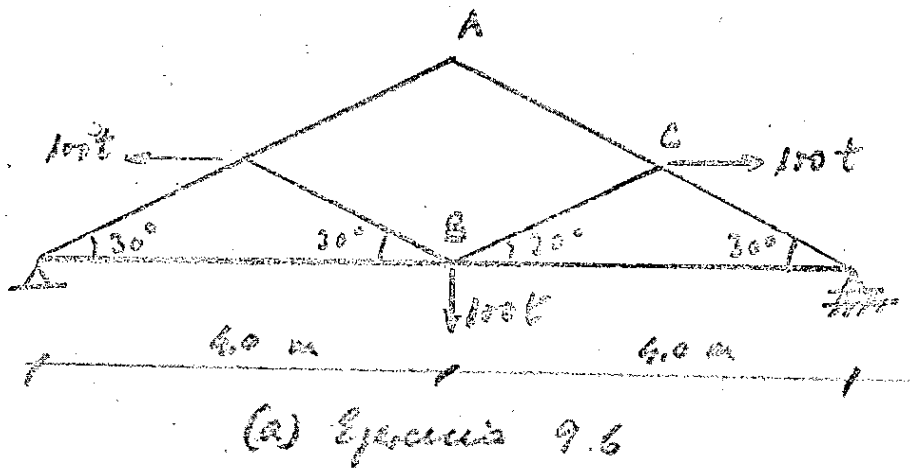
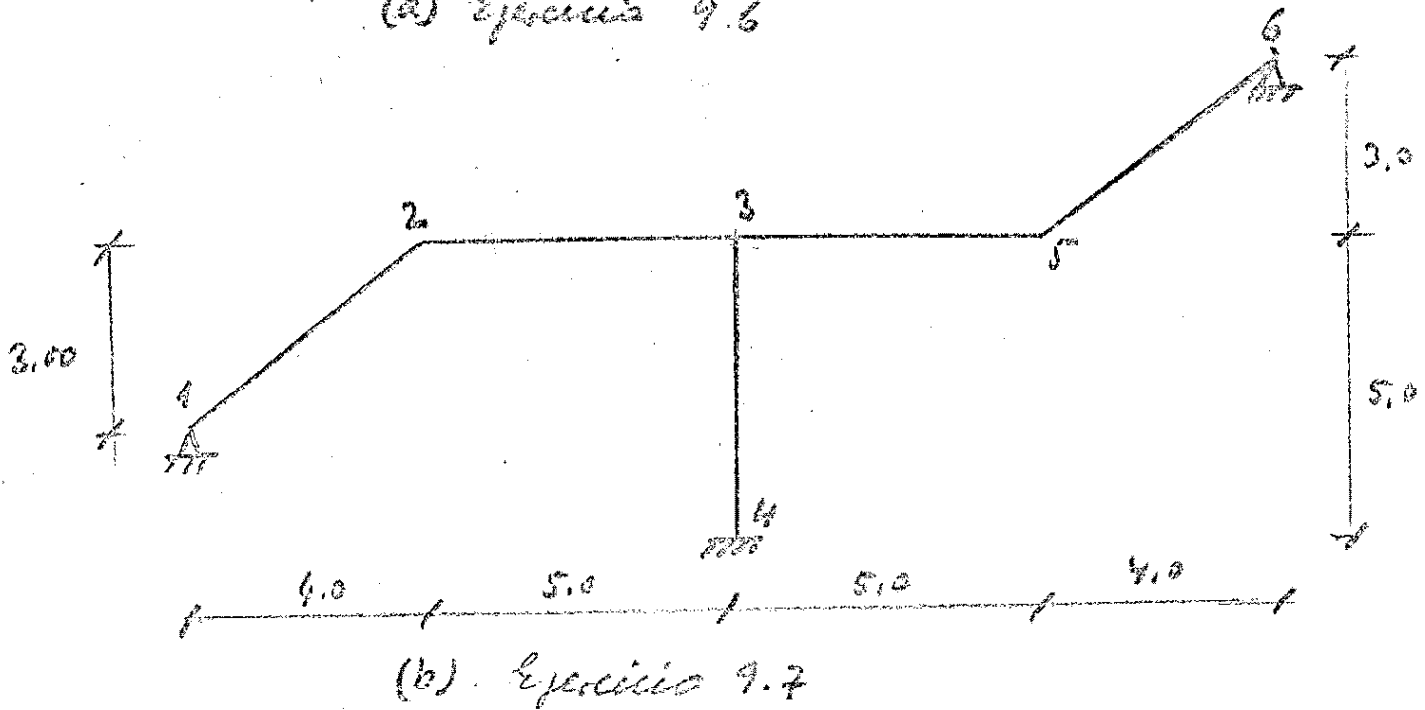


Figura 9.43. Ejercicio 9.5.



(a) Ejercicio 9.6



(b) Ejercicio 9.7

Figura 9.44. Ejercicios 9.6 y 9.7.

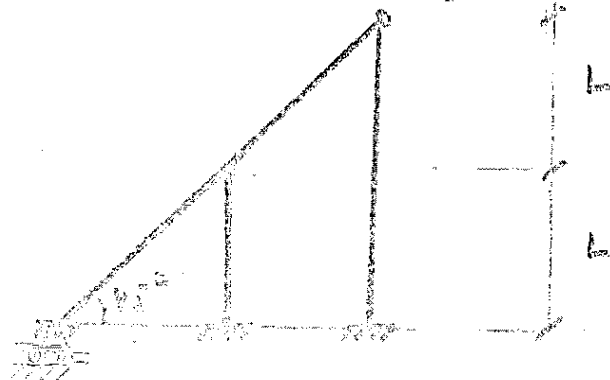


Figura 9.45. Ejercicio 9.8.

- 9.9. En la estructura que se indica en la figura 9.46 todas las barras son indeformables a esfuerzo axil y tienen la misma sec-ción y módulo de elasticidad.

Se pide obtener el esfuerzo axil en la barra AB cuando - se solicita la estructura con el sistema de cargas indicado.

- 9.10. En la estructura de la figura 9.47 hallar las leyes de esfuerzos axiles, de momentos flectores y cortantes. Idéntica cues-tión suponiendo que el apoyo 4 es una articulación fija.

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2.$$

- 9.11. En la estructura de la figura 9.48 todas las barras son inex-tensibles y de sección constante  $EI = 10^6 \text{ m}^2 \text{t}$ . Determinar las leyes de esfuerzos en todas las barras.

Se supone que la pieza 3456 es maciza con rigideces a - flexión y extensión infinitas.

- 9.12. En la estructura reticulada de la figura 9.49 constituida por un exágono regular de lado 8 m, se pide determinar el movimiento relativo entre los nudos A y D.

Las barras AB, CD y B'C' son infinitamente rígidas a fle-xión y a extensión. Las restantes barras presentan las siguientes características:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^{-2}.$$

$$I = 0,02 \text{ m}^4.$$

$$A = 0,25 \text{ m}^2.$$

y se consideran flexibles y elongables.



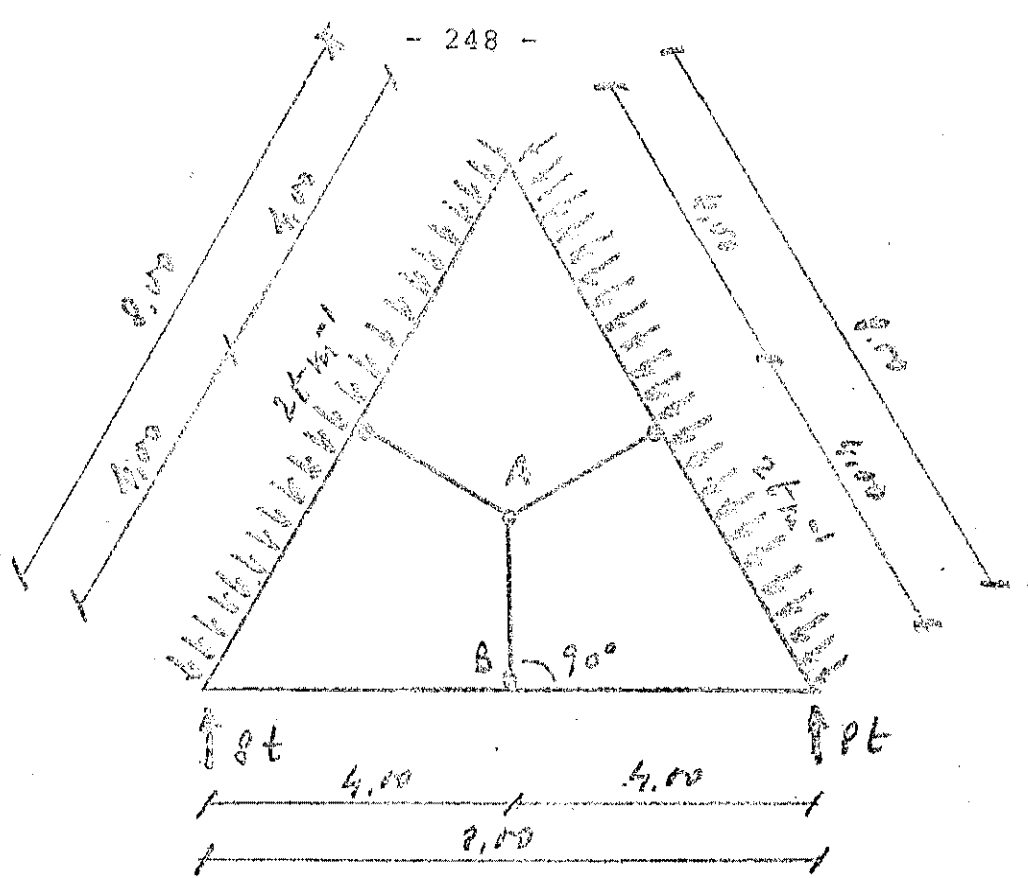


Figura 9.46. Ejercicio 9.9.

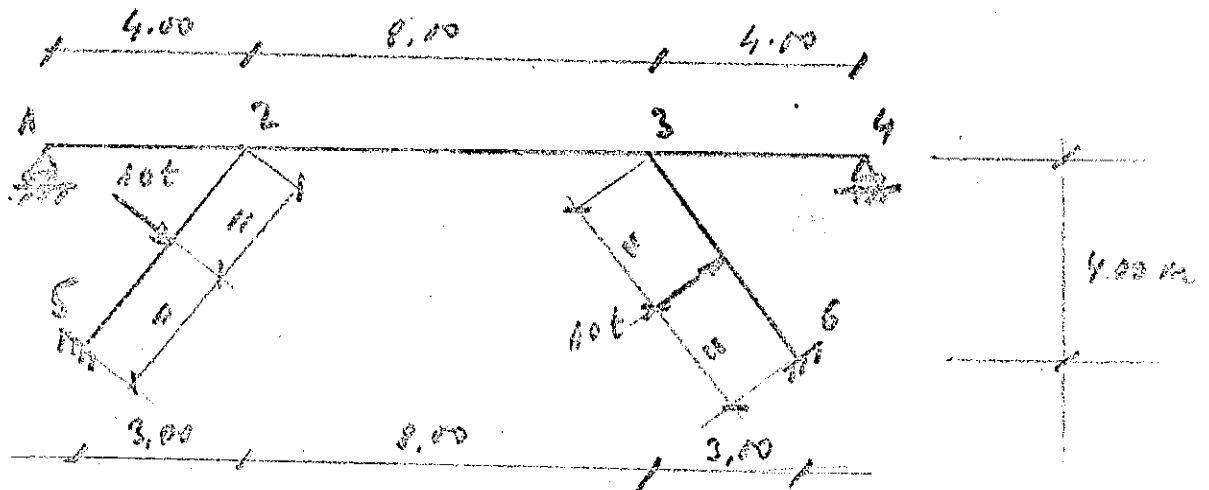


Figura 9.47. Ejercicio 9.10.

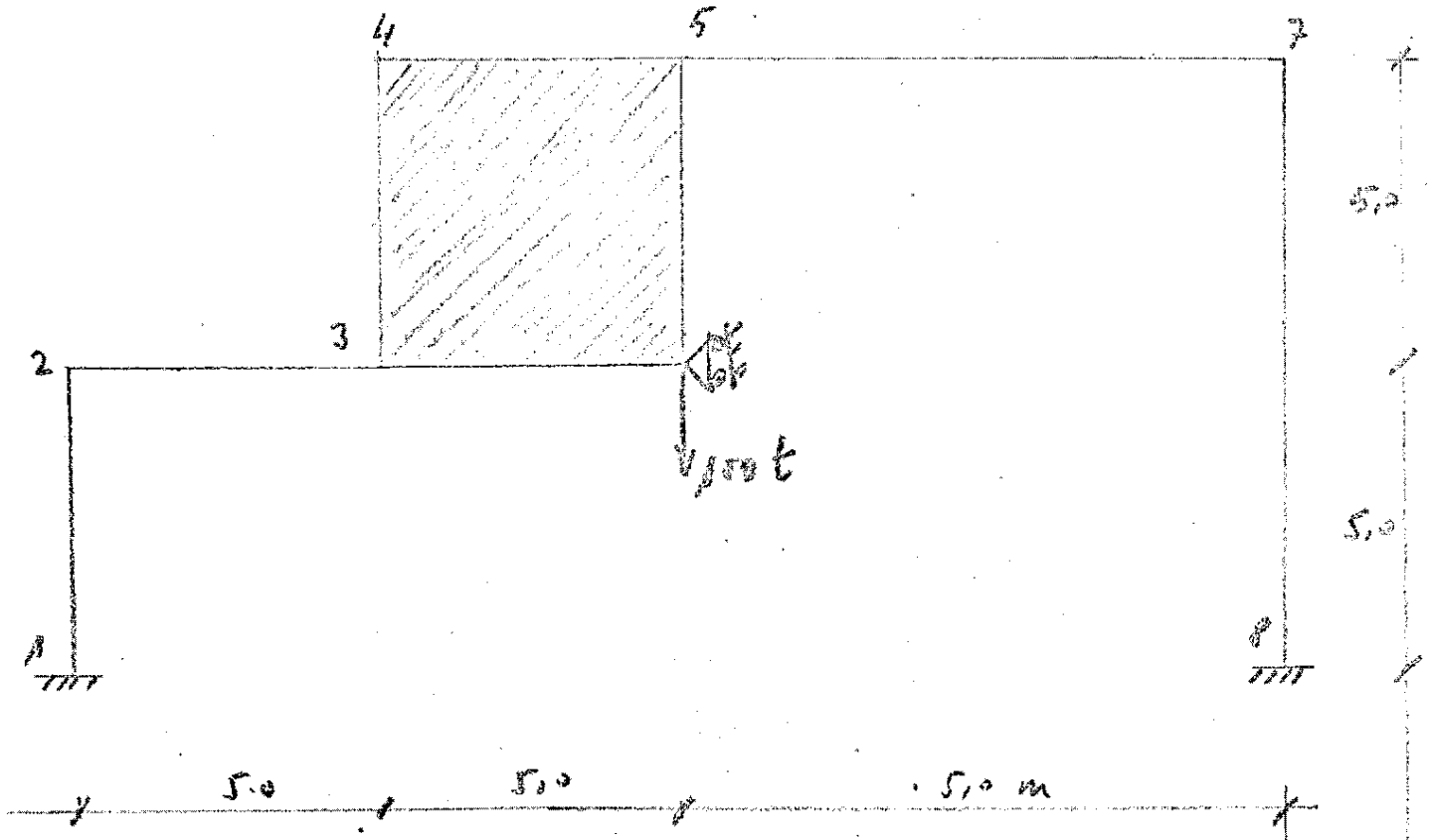


Figura 9.48. Ejercicio 9.11.

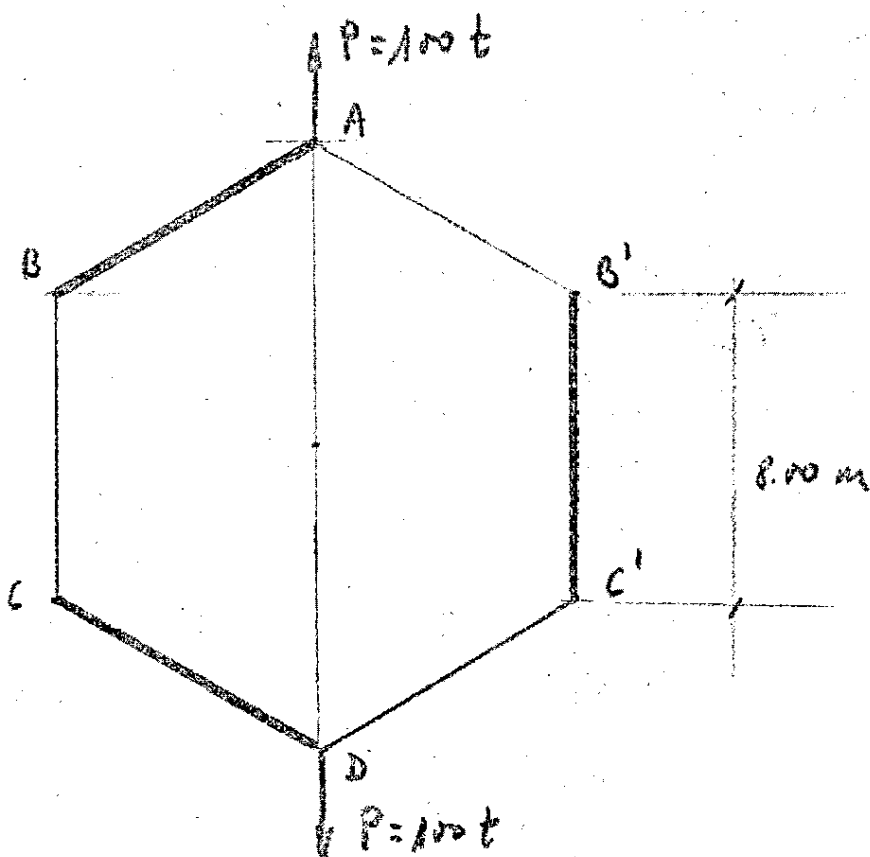


Figura 9.49. Ejercicio 9.12.

9.13. En la estructura de nudos rígidos de la figura 9.50 y sometida a las acciones que en ella se indican, se pide:

Movimiento rotativo entre A y B expresado en centímetros.

Sección de todas las barras: 0,40 . 0,20.

$E = 200.000 \text{ kg/cm}^2$ .

9.14. En la estructura reticulada de la figura 9.51, todas las barras son de sección constante y de la misma sección todas y cada una de ellas de 0,50 m. de canto por 0,30 m. de ancho.  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ .

Se pide:

- 1) Esfuerzos en la rebanada media de la barra BC.
- 2) Esfuerzos en la rebanada media de la barra AB.
- 3) Corrimiento relativo del nudo F con relación al B.

9.15. En la estructura indicada en la figura 9.52 se pide:

- 1) Esfuerzo en el tirante  $\overline{BC}$ .
- 2) Leyes de esfuerzos en la barra  $\overline{AC}$ .
- 3) Movimiento relativo entre B y C.

Barras	Sección	E
AB		
AC		
BD	0,40 . 0,20 m <sup>2</sup> .	$2 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$ .
CD		
BC	6 cm <sup>2</sup> .	$2 \cdot 10^7 \text{ t/m}^2$ .

9.16. En la estructura representada en la figura 9.53 determinar los movimientos del nudo 4, producidos por un descenso vertical de 5 cm. del apoyo 6.

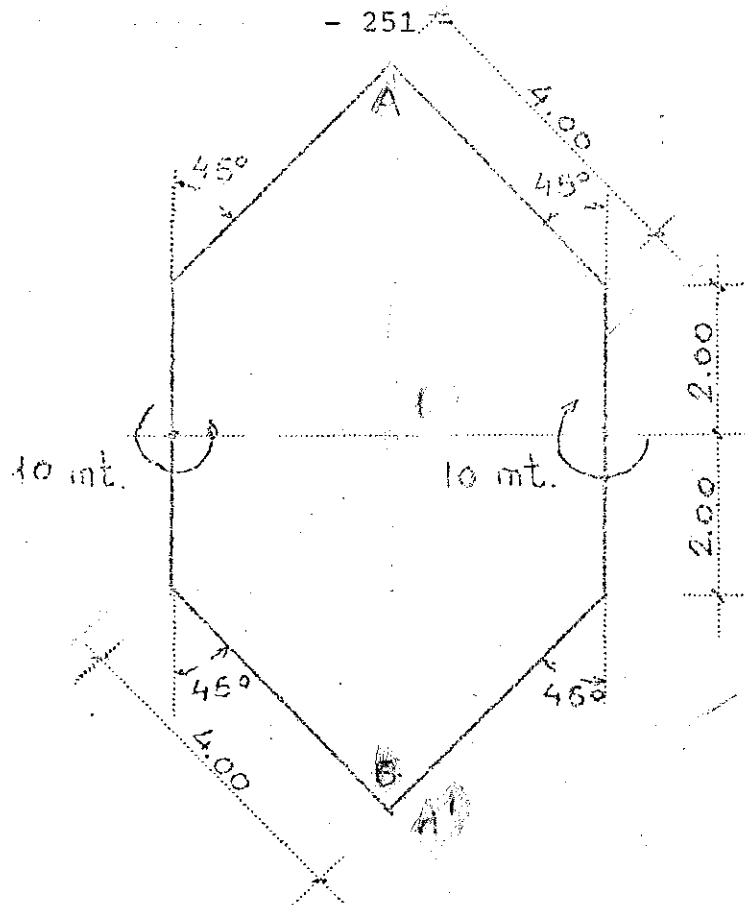


Figura 9.50. Ejercicio 9.13.

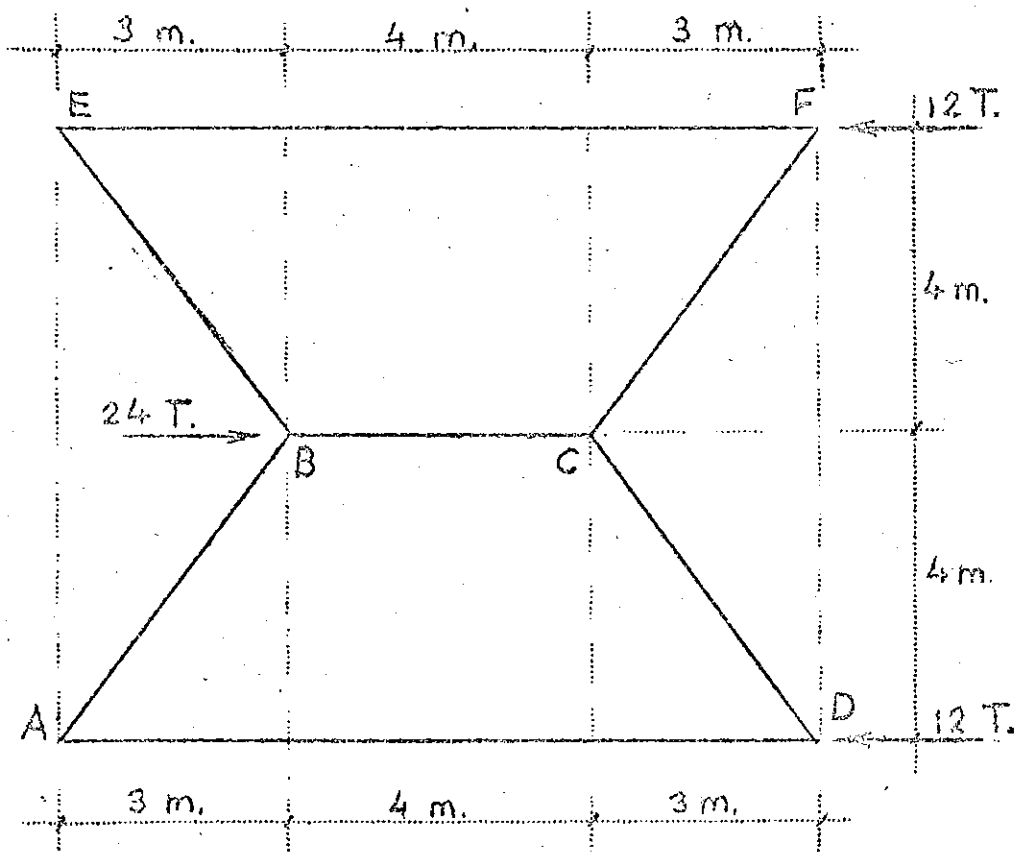


Figura 9.51. Ejercicio 9.14.

Todas las barras son de hormigón e inelongables, con una sección de  $0,60 \times 0,20 \text{ m}^2$ , a excepción de la barra simétrica 2-3, que presenta una sección transversal variable longitudinalmente.

Se supone que bajo un descenso relativo de apoyos de 3 cm, la barra 2-3, supuesta aislada y rígidamente empotrada en sus extremos, experimenta un momento de empotramiento de 120 m.t.

El módulo de elasticidad de todas las barras es  $3 \cdot 10^6 \text{ t.m}^{-2}$ .

9.17. En la estructura adjunta de la figura 9.54 se pide:

- a) Esfuerzo en el tirante 1-2.
- b) Esfuerzo en el punto medio de la barra 4-5.
- c) Corrimientos horizontal y vertical del nudo 5 expresados en cm.

Se considerará el alargamiento del tirante.

Características de las barras:

Tirante:  $\Omega = 3 \text{ cm}^2$ ,  $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ .

Barras: Ancho = 0,10 m.; canto = 0,30;  $E = 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ .

9.18. En la estructura de la figura 9.55, todas las barras, excepto el tirante (a), son de hormigón, con un módulo de elasticidad de  $2 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ . y tienen todas una sección de  $40 \times 30 \text{ cm}$ . (canto  $\times$  ancho). El tirante es de acero, con un módulo de elasticidad de  $2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$  y una sección de  $5 \text{ cm}^2$ .

Se pide, para un aumento de temperatura de  $50^\circ\text{C}$ . *de esp.*

- 1) Esfuerzo en el tirante.

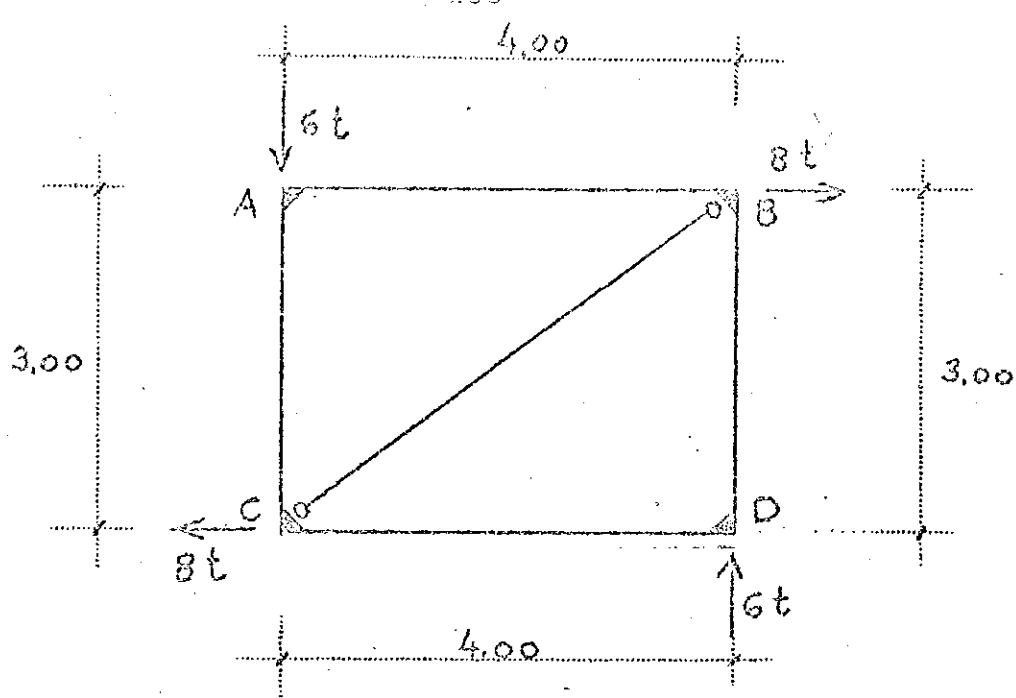


Figura 9.52. Ejercicio 9.15.

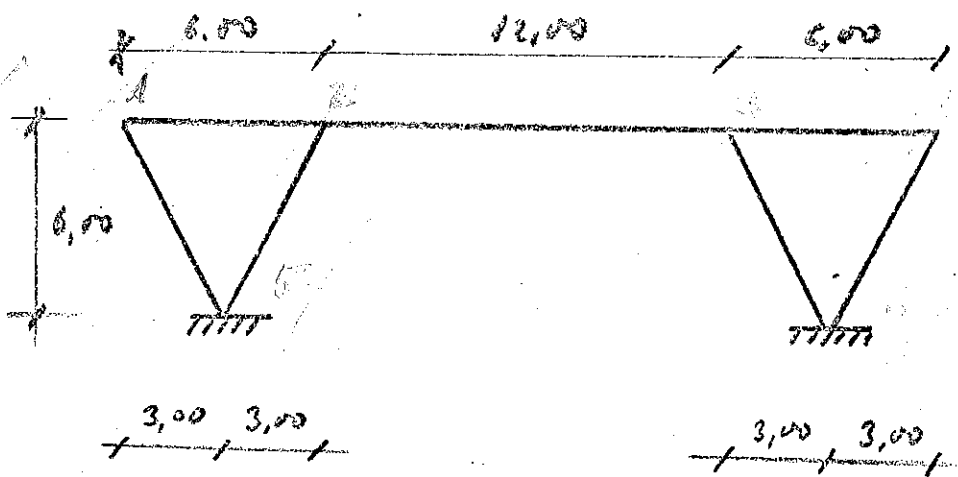


Figura 9.53. Ejercicio 9.16.

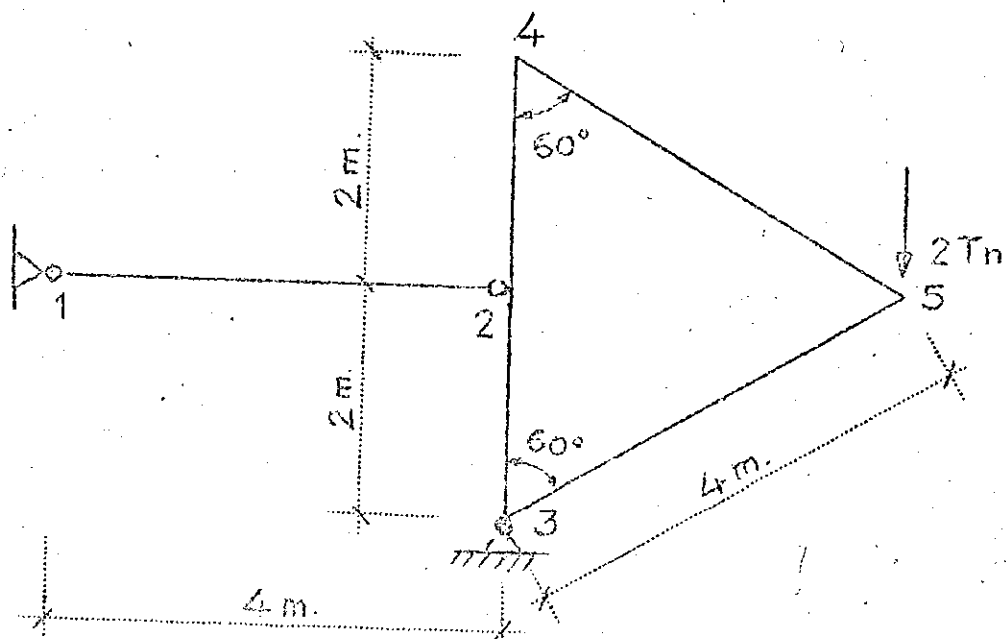


Figura 9.54. Ejercicio 9.17.

2) Corrimiento del punto A.

El coeficiente de dilatación térmica es:  $\alpha = 10^{-5}$  por  $^{\circ}\text{C}$ .

El tirante (b) es indeformable.

9.19. La estructura indicada en la figura 9.56 está formada por barras cuyas características geométricas son las siguientes:

Barras 1-2; 2-4; 3-4; 4-5; 4-7;-  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ancho} = 0,20 \text{ m.} \\ \text{Canto} = 0,50 \text{ m.} \\ E = 2 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2. \end{array} \right.$

Barra 5-6;-  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ancho} = \text{Canto} = 0,10 \text{ m.} \\ E = 2 \cdot 10^7 \text{ t/m}^2. \end{array} \right.$

Barra 7-8;-  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ancho constante de } 0,20 \text{ m.} \\ \text{Canto con variación lineal entre } 0,20 \text{ m. en el punto 8 y } 0,50 \text{ m. en 7.} \\ E = 2 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2. \end{array} \right.$

Barra 6-7;-  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ancho constante de } 0,20 \text{ m.} \\ \text{Canto con variación lineal entre } 0,20 \text{ m. en el punto 6 y } 0,50 \text{ m. en 7.} \\ E = 2 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2. \end{array} \right.$

Se pide obtener las reacciones en el apoyo 3 y los esfuerzos en la rebanada central de la barra 1-2, para las solicitaciones indicadas.

9.20. El marco de la figura 9.57 representa la sección transversal de un acueducto de hormigón de gran longitud, que se apoya directamente en el terreno, el cual se supone tiene un comportamiento elástico, tipo Winkler, con módulo de balasto  $K = 20 \text{ Kg/cm}^3$ .





Con el objeto de dimensionar la armadura transversal de la estructura, y dada la gran longitud de la misma, se calcula un tramo cualquiera de ella, de un metro de longitud, analizándolo como un entramado plano (estructura representada en la figura).

La única acción a considerar en el análisis es la del agua, que se supone circula por el acueducto a plena sección y en lámina libre.

El espesor de las cuatro paredes es constante e igual a 40 cm, y el módulo de deformación longitudinal del hormigón se toma igual a  $2 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ .

Se pide:

Hallar los esfuerzos (momento flector, esfuerzo cortante y esfuerzo axil) en las secciones  $0_1$  y  $0_2$ .

Nota: No serán tenidas en cuenta las deformaciones por efecto de los esfuerzos axil y cortante.

- 9.21. El pórtico de la figura 9.58 tiene una sección cuya inercia a flexión se indica y su módulo de elasticidad es E. En el proyecto se dispuso su cimentación sobre zapatas y, dadas las características de éstas y del terreno, se supuso, en el cálculo, que existía empotramiento total entre cada soporte vertical y la zapata. Sin embargo, en la fase de la construcción, se comprobó que la zona de terreno situada debajo de los pilares 3-4 y 6-5 era de peor calidad que la prevista inicialmente, por lo que las zapatas 3 y 6 se construyeron unidas entre sí. Esta zapata única se considera, en el cálculo, completamente rígida a flexión, y los soportes están empotrados a la misma.

Se pide:

- 1) Determinar los esfuerzos momentos flectores que se producen en el pórtico, si el punto medio de la zapata corrida 3-6 sufre un asiento de valor  $\delta$  y toda ella gira un ángulo  $\theta$ .
- 2) Hallar la relación que debe existir entre los valores  $\delta$  y  $\theta$ , para que el movimiento horizontal del nudo 2 sea nulo.

Datos:

$$a = 6.00 \text{ m.} \quad \delta = 1 + 0.3N \text{ cm.} \quad I = 0,025 \text{ m}^4.$$

$$\theta = 3 + 0.3N \text{ milésimas de radián.}$$

$$N = 10$$

Nota: Se realizará el cálculo considerando las máximas simetrías posibles, de modo que resulten cálculos de Cross de un solo nudo.

9.22. En la estructura de la figura 9.59 todas las barras se suponen inextensibles con EI constante en cada barra e idénticas entre sí.

Las fuerzas actuantes son una carga vertical V y una carga horizontal H.

Se pide:

- 1) Reacciones.
- 2) Deformada de la estructura suponiendo  $EI = 10^4 \text{ t.m}^2$ .  
Se acotarán los desplazamientos de los nudos.

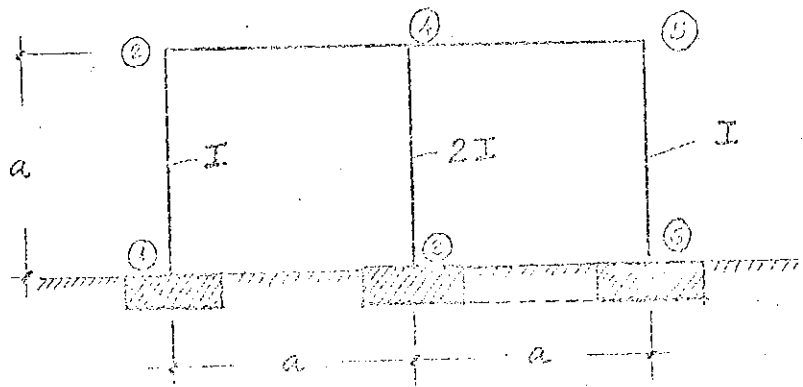


Figura 9.58. Ejercicio 9.21.

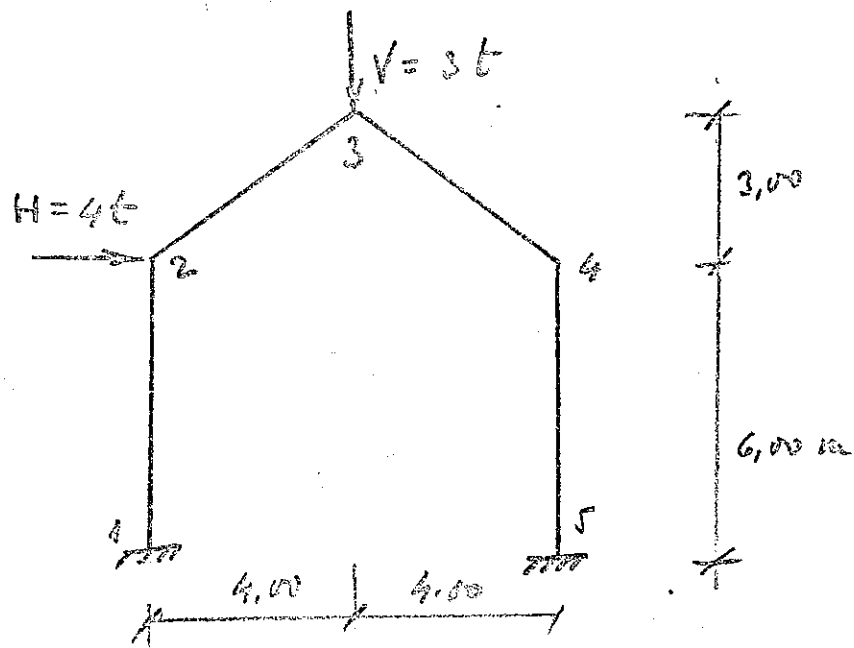


Figura 9.59. Ejercicio 9.22.

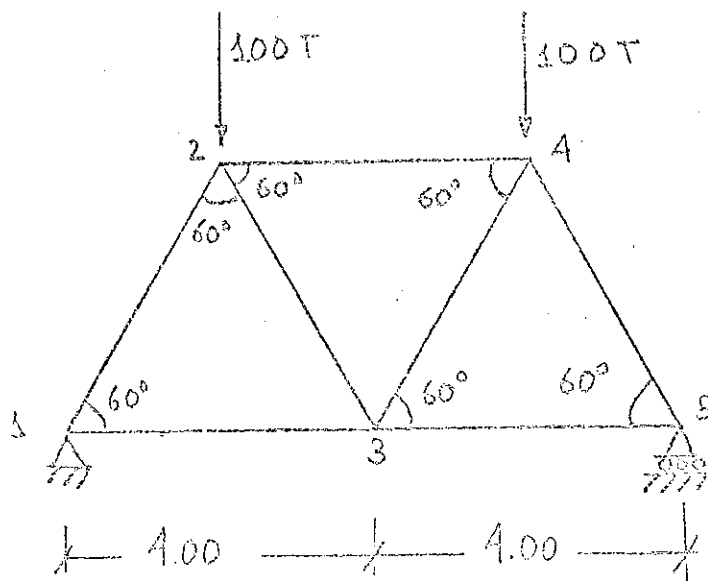


Figura 9.60. Ejercicio 9.23.

- 3) Determinar la característica  $k = (E\Omega)_T$  de un tirante extensible, sin rigidez a flexión que una los nudos 1 y 4, de modo que el desplazamiento del nudo 4,  $\delta_4$ , calculado en el apartado anterior se reduzca a una fracción  $\frac{\delta_4}{12}$ .
- 4) Esfuerzo en el tirante.

9.23. Determinar los esfuerzos en todas las barras de la estructura que se indica en la figura 9.60 suponiendo los casos siguientes:

- 1) Todos los nudos son articulados.
- 2) Todas las barras que coinciden en un nudo están rígidamente empotradas entre sí.
- 3) Comparar los resultados del caso 2 (esfuerzos secundarios) con los deducidos en el caso 1. Considerar en particular las tensiones máximas.

Todas las barras tienen un canto total de 32 cm., área - 118 cm<sup>2</sup>. e inercia 18.780 cm<sup>4</sup>. El módulo de elasticidad del material es de  $2 \times 10^7$  Kg/cm<sup>2</sup>.

Se suponen todas las barras extensibles.

9.24. En el cálculo preliminar de dimensionamiento de un puente continuo, se supone que la viga de borde es de sección variable, esquematizada según dos tramos de igual longitud, y sección constante cada uno de ellos, con inercias respectivas  $I$  y  $kI$  ( $k > 1$ ), tal como se indica en la figura 9.61.

Por otra parte, se sabe que cuando actúan una carga vertical de 100 t en el centro del vano extremo (sección de cambio de inercias) aparece una reacción en el apoyo A de 38 t.

Se desea conocer la rigidez al giro del tramo de puente -  
L constituido por todos los vanos situados a la derecha del va

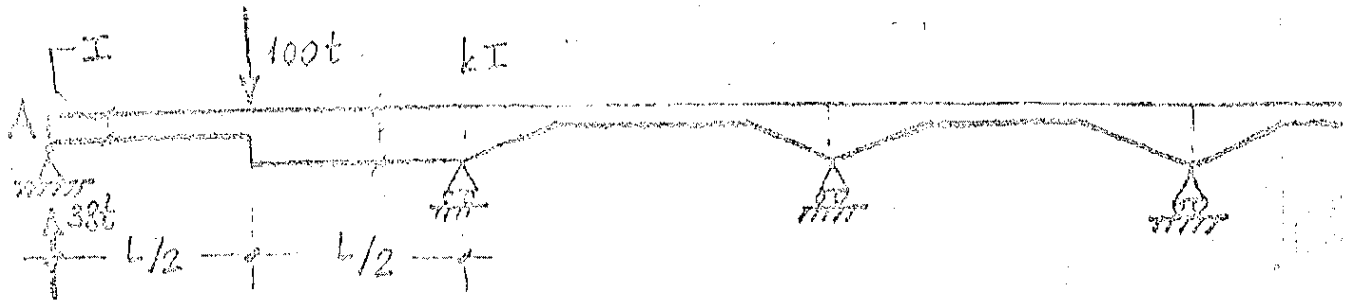


Figura 9.61. Ejercicio 9.24.

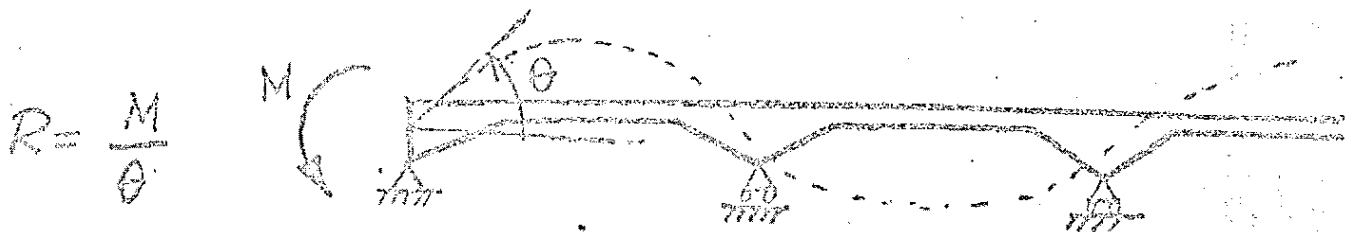


Figura 9.62. Ejercicio 9.24.

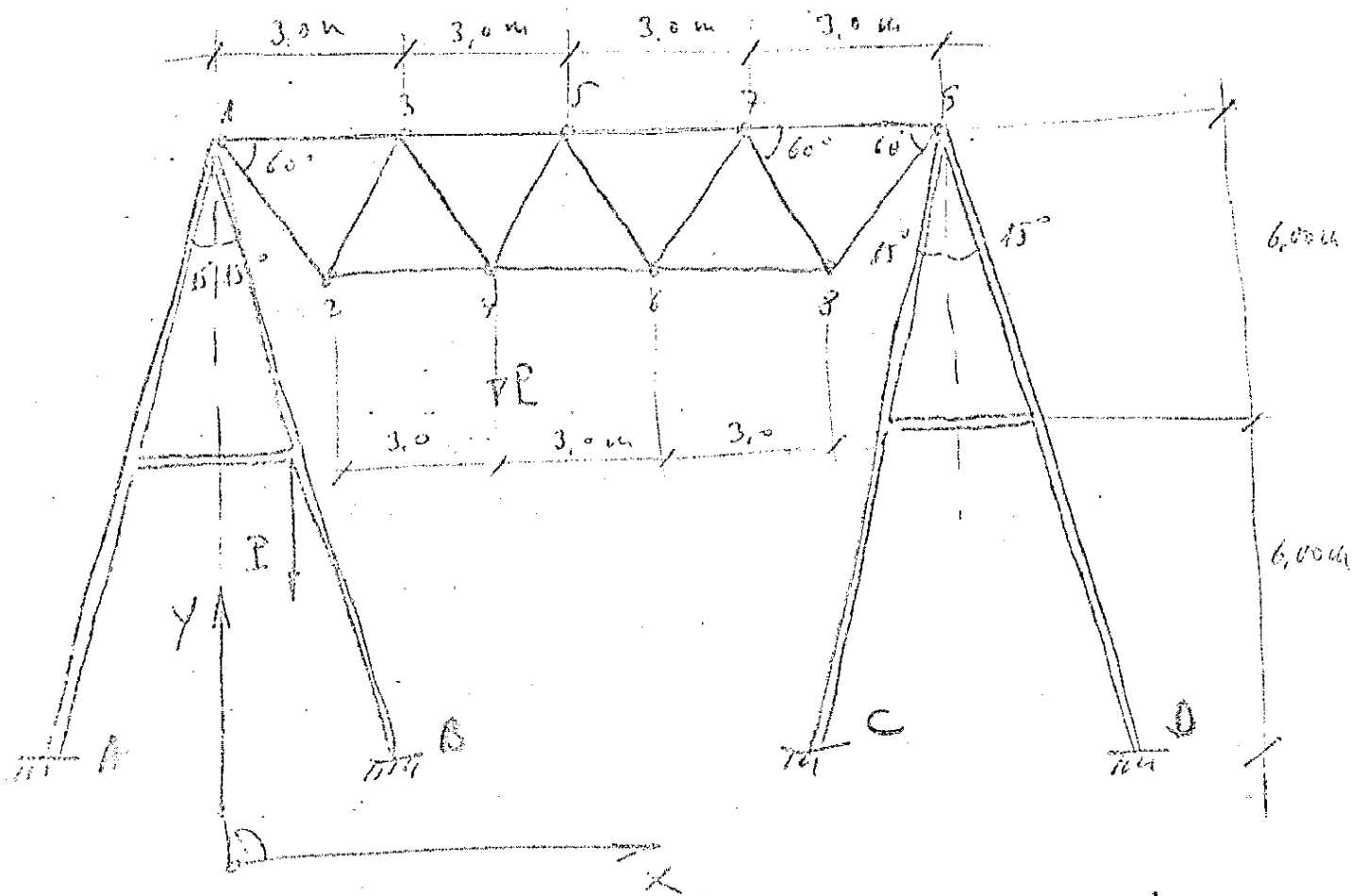


Figura 9.64. Ejercicio 9.26.

no extremo, es decir, la relación momento/giro que se indica en la figura 9.62.

Datos:  $k = N/5+1$

$EI/L = 10^6 \text{ mt.}$

N (número entero de 1 a 30)

Nota: La resolución de este ejercicio permitiría proceder, en un caso real, al análisis del vano extremo del puente de un modo simple, al considerarlo aisladamente.

- 9.25. Las barras BC, BE, EC, CD de la figura 9.63 son de hormigón armado con un área de  $1,0 \cdot 0,40 \text{ m}$ , y módulo de elasticidad de  $300.000 \text{ Kg/cm}^2$ . (no se considera la elongabilidad).

Las restantes barras constituyen una celosía metálica con  $25,0 \text{ cm}^2$  de área y un módulo de elasticidad de  $2,1 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ .

Se desea conocer la flecha vertical del nudo A.

- 9.26. La estructura de la figura 9.64 se encuentra sometida a las fuerzas de valor P que se indican y a una dilatación  $\Delta l$  de la barra 5-6.

Se pide:

- 1) Desplazamiento relativo entre los nudos 4-7.
- 2) Reacciones en los apoyos, resueltas según los ejes generales X, Y.

$P = 100 \text{ t.}$

$\Delta l = 6 \text{ cm.}$

Las barras de la celosia son metálicas con un área de  $10 \text{ cm}^2$ . Las restantes son de hormigón y con una sección de  $0,60 \cdot 0,60 \text{ m}$ .

La relación de módulos de elasticidad entre el acero y hormigón es 10.  $E_a = 2 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ .

9.27. En la estructura de la figura 9.65 se desea conocer el movimiento del nudo A.

Sección de todas las piezas 0,40 . 0,20 m.

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ Tm}^{-2}.$$

9.28. La cubierta de la figura 9.66 está constituida por una estructura entramado de hormigón (sus nudos se designan por letras) y por otra en celosía metálica (con sus nudos numerados), que se encuentra articulada a la anterior.

Las acciones consideradas en el cálculo estructural han sido:

- 1) Pretensado sobre la barra A-A', que puede modelarse como una ley de esfuerzos internos (momentos flectores) - constante en toda su longitud y de valor 200 m.t por metro de luz y dos fuerzas horizontales en sus extremos - de valor  $H = 100 \text{ t}$ .
- 2) Existe, además, una sobrecarga importante, que, en primera aproximación, se supone es una fuerza vertical descendente de 100 toneladas actuando en el nudo 7.
- 3) En el montaje de la estructura de celosía, se observó un error en la longitud de la barra 6-8 de 10 cm. por defecto.

Se pide:

- 1) Esfuerzos en la sección central de la viga A-A'.

Estructura de hormigón:

-Módulo de elasticidad:  $300.000 \text{ Kg.cm}^{-2}$ .

-Secciones: Barra A-A'  $2,00 \times 0,70 \text{ m}^2$ .

Restantes barras  $1,00 \times 0,70 \text{ m}^2$ .

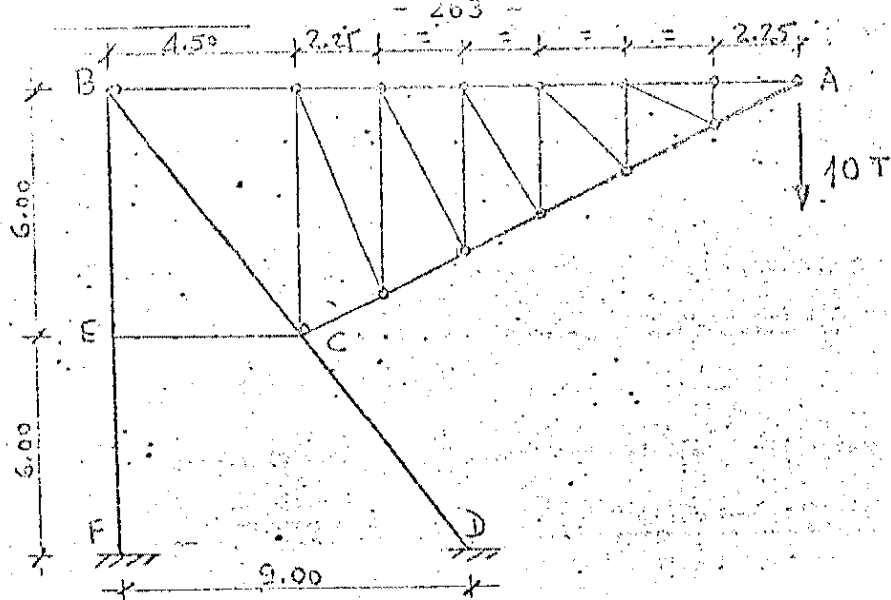


Figura 9.63. Ejercicio 9.25.

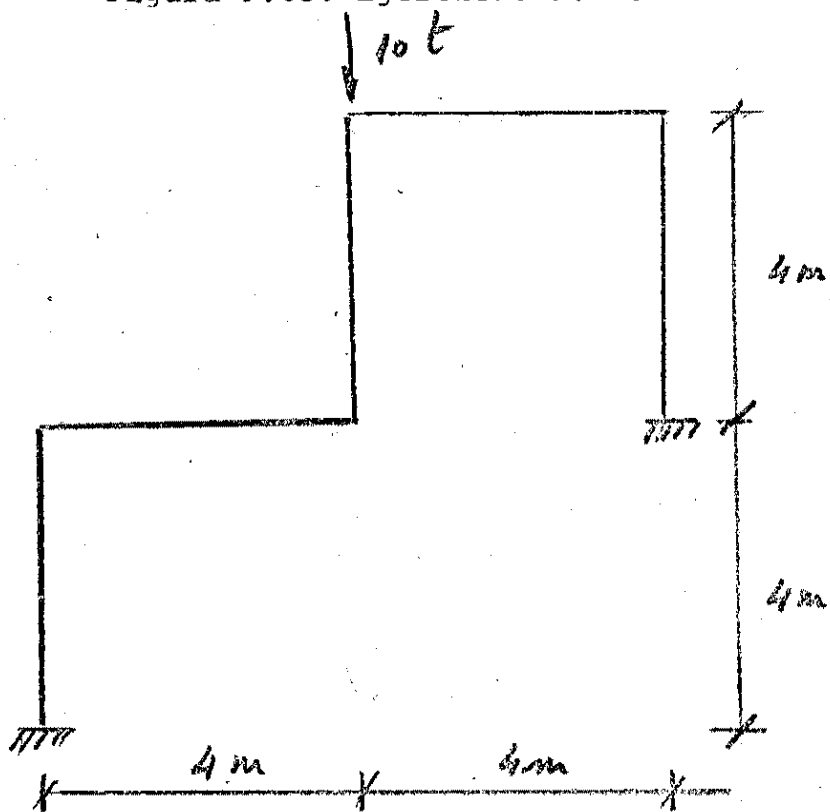


Figura 9.65. Ejercicio 9.27.

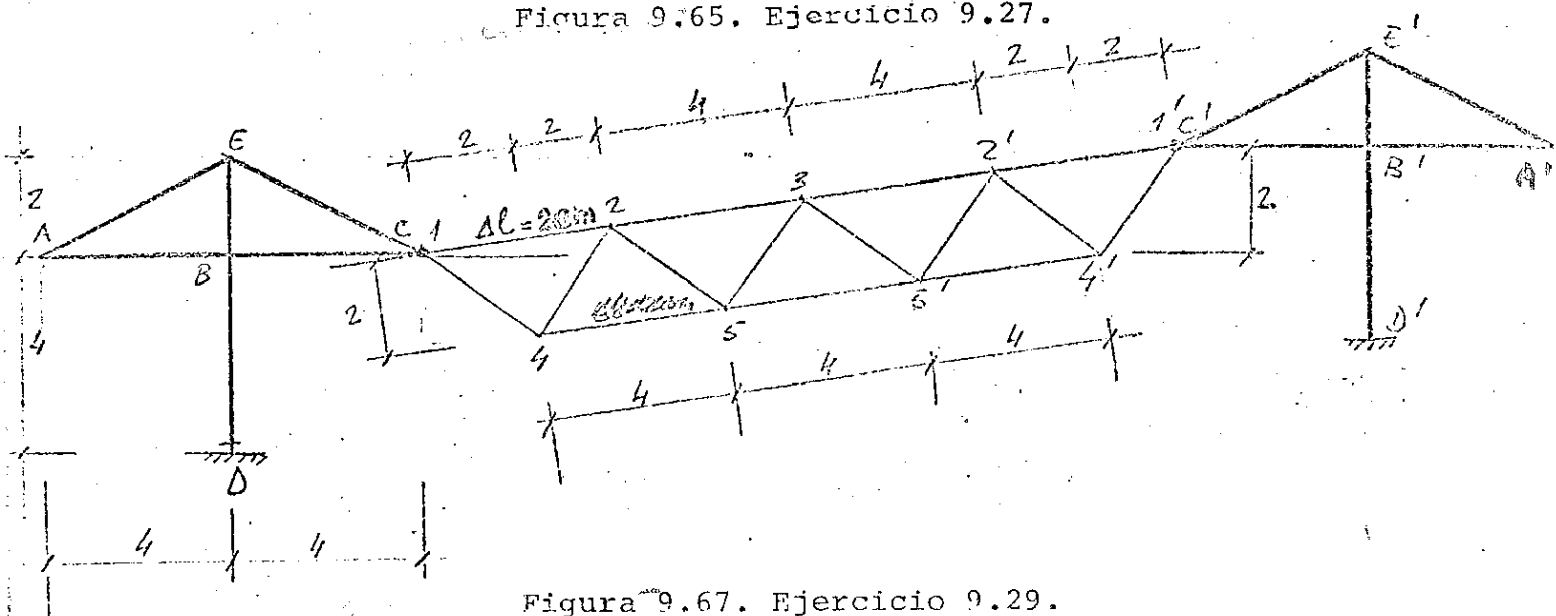


Figura 9.67. Ejercicio 9.29.



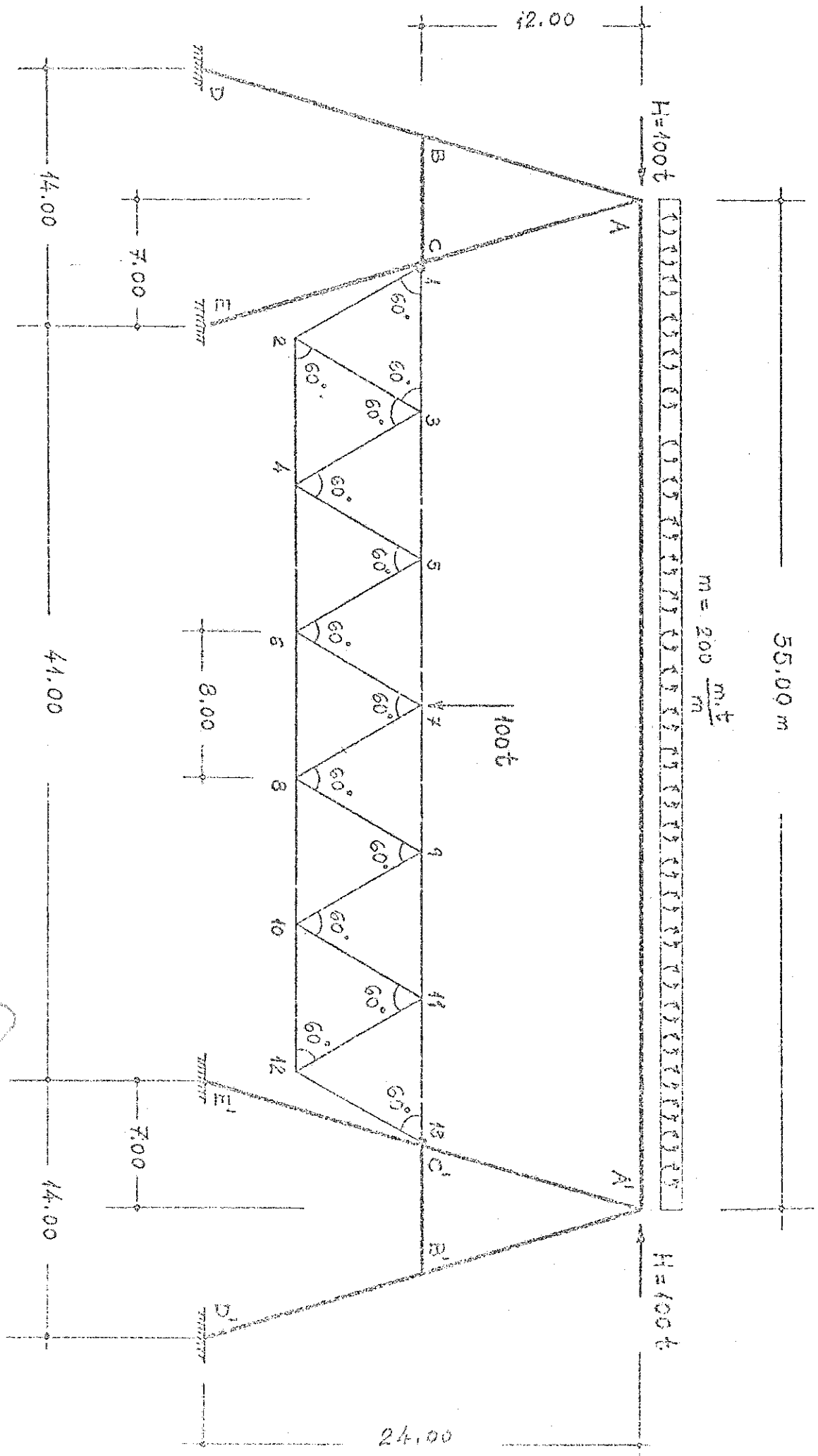
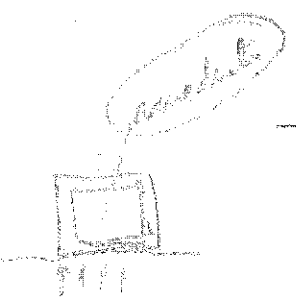


Figura 9.66. Ejercicio 9.28.



Estructura metálica:

- Módulo de elasticidad:  $2.000.000 \text{ Kg.cm}^{-2}$ .
- Sección en todas las barras  $150 \text{ cm}^2$ .

Nota: No se considera la deformación por axil en las barras de hormigón, a excepción de la barra 4-5.

9.29. La estructura representada en la figura 9.67 se compone de dos pórticos iguales de nudos rígidos (ABCE y A'B'C'E'D') y una viga en celosía (12345 y 5'4'3'2'1') biarticulada en los pórticos anteriores. Se admite que los nudos D y D' están empotrados perfectamente. Se supone que la barra 1-2 sufre un incremento de longitud de 2 cm. debido a la temperatura.

Se pide:

- 1) Esfuerzos en D.
- 2) Giro del nudo B.
- 3) Esfuerzo en la barra 1-2.
- 4) Movimiento del nudo 5.

Datos:

Todas las barras de la estructura entramado son prismáticas de sección  $0,50 \times 0,20 \text{ m}$ . y módulo de elasticidad  $E_p = 2 \cdot 10^6 \text{ t.m}^{-2}$ . La estructura en celosía está constituida por barras de  $10 \text{ cm}^2$ . de sección y módulo de elasticidad  $E_a = 2 \cdot 10^7 \text{ t.m}^{-2}$ .

Notas: Deberán de utilizarse todas las simplificaciones posibles.

En la resolución del método de Cross se utilizarán 1 reparto, 1 transmisión y 1 reparto.

EJERCICIOS. SOLUCIONES

9.1. La figura 9.68 indica la solución así como las secciones a considerar para el equilibrio de esfuerzos cortantes.

9.2. (a),(b) y (d) traslación hacia la derecha.  
(c) Intraslacional.

9.3. Si  $\bar{x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{L}$  las posiciones vienen dadas por la ecuación cúbica:

$$\bar{x}^3 - \frac{1}{4} \bar{x} + \frac{k + (1+\gamma)}{2(1+\gamma_{12})} \operatorname{sen} \alpha = 0$$

9.4. Es mayor el desplazamiento en la estructura 2.

9.5. La primera estructura es traslacional  $\alpha = 1$  y la segunda es intraslacional.

Reacción en la primera estructura:

$$N = 4,13 \text{ t}; \quad Q = 0,375 \text{ t} \quad \text{y} \quad M = 0,375 \text{ mt.}$$

Reacción en la segunda estructura:

$$N = -0,28 \text{ t}; \quad Q = -0,78 \text{ t} \quad \text{y} \quad M = -0,80 \text{ mt.}$$

con sentido positivo de las reacciones la dirección AC y su normal a  $90^\circ$  (antihoraria) y al signo de momentos antihorarios.

9.6.  $V_B = 6,5 \text{ mm.}$

$$M_{AC} = 0,90 \text{ mt.} \quad N_{AC} = -30,64 \text{ t} \quad \text{y} \quad Q_{AC} = -17,69 \text{ t.}$$

9.7. Leyes de momentos flectores:

BARRA i-j	$\mu_i$	$\mu_{i-j}$	$\mu_j$	VARIACION
1-2	0	8,73	9,46	Parabolica
2-3	9,46	-0,32	-22,60	"
3-5	-14,93	2,71	7,85	"
5-6	7,85	7,925	0	"
4-3	-10,10	-	7,67	Lineal

Leyes de esfuerzos cortantes y axiles:

BARRA i-j	$q_i$	$q_j$	$v_i$	$v_j$
1-2	-5,09	1,41	-4,16	0,61
2-3	1,41	11,41	-0,30	-0,30
3-5	-9,56	0,44	3,31	3,31
5-6	-1,63	4,77	2,92	7,72
4-3	-3,56	-3,56	-20,97	-20,97

Son leyes lineales a lo largo de cada barra.

Movimientos en los nudos ( $\times 10^{-3}$ );

NUDO i	1	2	3	4	5	6
$u_i$	0	6,06	6,06	0	6,06	0
$v_i$	0	-8,08	0	0	-8,08	0
$\theta_i$	-3,77	0,67	-0,69	0	-0,35	3,61

Unidades: metros y toneladas.

9.8.  $\mu_A = 2,055 \text{ mm.}$

$\mu_B = -0,445 \text{ mm.}$

9.9.  $N = -11,62 \text{ t.}$

9.10. Ver figura 9.69.

9.11. Es una estructura dos veces traslacional.

BARRA i-j	$M_i$	$M_j$	$Q_i$	$Q_j$	$N_i$	$N_j$
1-2	73,33	-146,66	44	44	-36	-36
2-3	-146,66	33,33	-36	-36	-44	-44
5-7	381,66	-246,66	64	64	-44	-44
8-7	-193,33	246,66	-44	-44	-64	-64

Variación lineal en cada barra.

9.12.  $\Delta_{AB} = 74 \text{ mm.}$

9.13.  $\Delta_{AB} = 0,67 \text{ cm.}$

9.14. 1)  $\mu_{BC} = q_{BC} = 0; \quad v_{BC} = 12 \text{ t.}$

2)  $\mu_{AB} = 6,11 \text{ mt}; \quad q_{AB} = -5,83 \text{ t}; \quad v_{AB} = 2,26 \text{ t.}$

3)  $\Delta_{FB} = 8,7 \text{ mm.}$

9.15. 1)  $T_{BC} = 6,55 \text{ t.}$

2)  $\mu = 2,09 \text{ mt}; \quad q = 1,38 \text{ t}; \quad v = 4,95$

3)  $\Delta_{BC} = 2,8 \text{ mm.}$

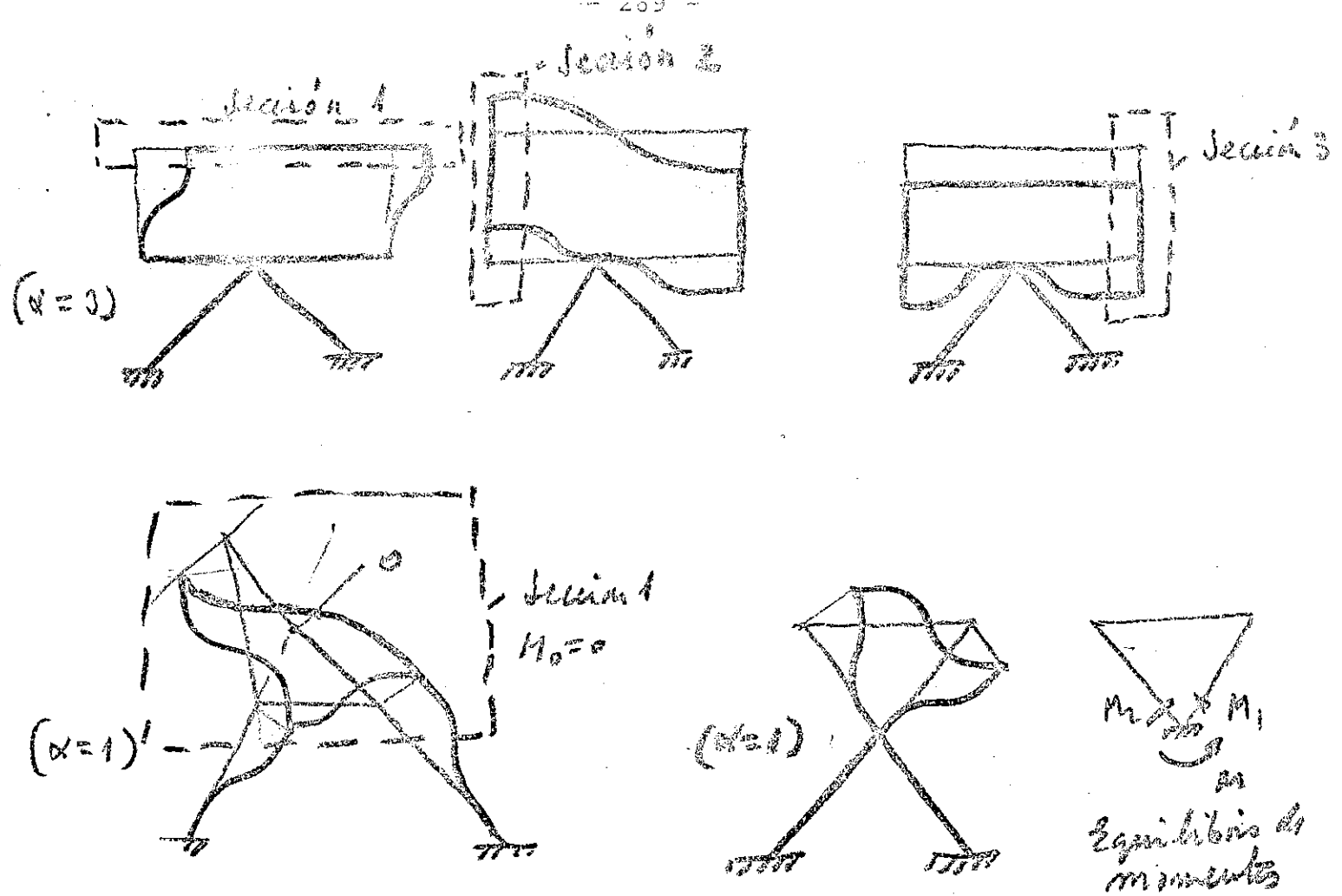


Figura 9.68. Solución al ejercicio 9.1.

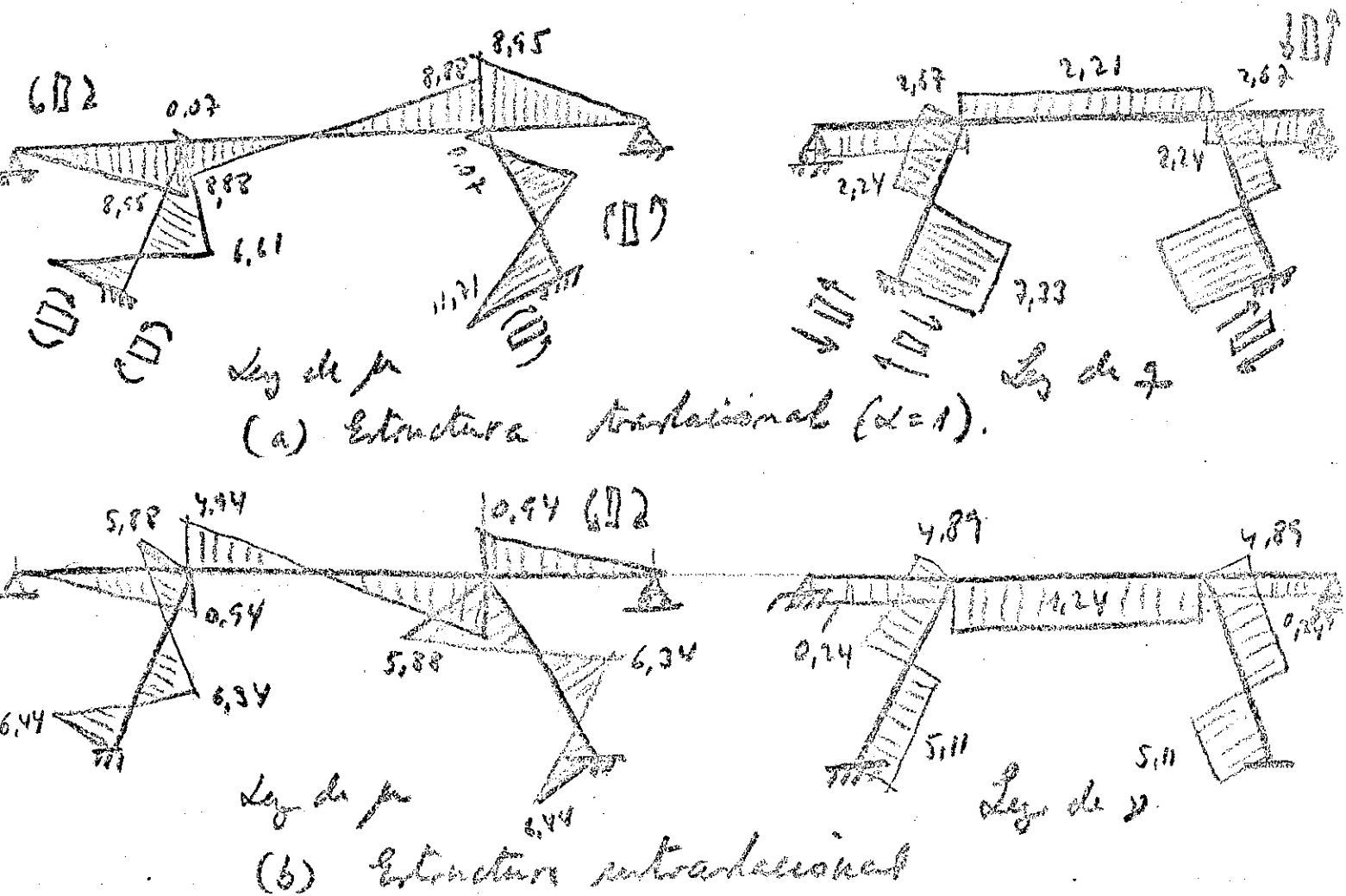


Figura 9.69. Solución al ejercicio 9.10.

9.16.  $u_4 = 1,10 \text{ cm}; \quad v_4 = 5,5 \text{ cm}; \quad \theta_4 = -2,75 \times 10^{-3}.$

9.17. a)  $T = 2\sqrt{3} = 3,4 \text{ t}.$

b)  $\mu = 0,29 \text{ mt}; \quad q = 0,43 \text{ t}; \quad v = 1,75 \text{ t}.$

c)  $\mu_5 = 1,25 \text{ cm}; \quad v_5 = -2,16 \text{ cm}.$

9.18. a)  $T = 3,0 \text{ t}.$  b)  $\mu_A = -2,7 \text{ mm}; \quad V_A = 3,4 \text{ mm}.$

9.19.  $M_3 = 18 \text{ mt}. \quad N_3 = -267 \text{ t}; \quad Q_3 = -10,66 \text{ t}.$

$\mu = 1,37 \text{ mt}; \quad q = -2,65 \text{ t}; \quad v = -15,35 \text{ t}.$

9.20. La determinación de las características de las barras y los momentos de empotramiento rígido es directa, a excepción de la barra A-B que se encuentra apoyada en una cimentación elástica.

Rigidez simétrica de la barra B'B:

Ecuación diferencial de la barra:

$$EI = \frac{d^4 w}{dx^4} + k w = 0$$

cuya solución es:

$$w = e^{\beta x} (A_1 \cos \beta x + A_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (A_3 \cos \beta x + A_4 \sin \beta x)$$

con

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$$

Si se considera el origen de coordenadas en la sección central de la viga, la deformada es simétrica, por lo que se obtiene:

$$w = \cos \beta (e^{\beta x} + e^{-\beta x}) A_1 + \operatorname{sen} \beta x \{e^{\beta x} - e^{-\beta x}\} A_2 \quad (1)$$

Las condiciones de contorno son:

$$x = \frac{L}{2} ; \quad M = EI \frac{d^2 w}{dx^2} = 1 ; \quad Q = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} = 0$$

es decir

$$-\operatorname{sen} \alpha \operatorname{Sh} \alpha A_1 - \cos \alpha \operatorname{Ch} \alpha A_2 = \frac{1}{4\beta^2 EI}$$

$$(-\cos \alpha \operatorname{Sh} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{Ch} \alpha) A_1 + (\cos \alpha \operatorname{Sh} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{Ch} \alpha) A_2 = 0$$

con

$$\alpha = \frac{\beta L}{2}$$

$$A_1 = \frac{\cos \alpha \operatorname{Sh} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{Ch} \alpha}{4\beta^2 EI (\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \operatorname{Ch} \alpha \operatorname{Sh} \alpha)}$$

$$A_2 = \frac{\cos \alpha \operatorname{Sh} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{Ch} \alpha}{4\beta^2 EI (\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \operatorname{Ch} \alpha \operatorname{Sh} \alpha)} \quad (2)$$

$$\text{El giro en el extremo } x = \frac{L}{2} \text{ es } \theta = \frac{dw}{dx}$$

$$\theta = \frac{\cos^2 \alpha \operatorname{Sh}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{Ch}^2 \alpha}{EI (\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \operatorname{Ch} \alpha \operatorname{Sh} \alpha)} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{Sh}^2 \alpha}{\beta EI (\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \operatorname{Ch} \alpha \operatorname{Sh} \alpha)}$$

$$R_S = \frac{1}{\theta} = \frac{2EI}{L} \frac{\alpha (\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \operatorname{Ch} \alpha \operatorname{Sh} \alpha)}{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{Sh}^2 \alpha}$$

$$\text{es decir } R_S = 0,7913EI$$



Los momentos de empotramiento rigido se calculan mediante la ecuación diferencial:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + kw = p$$

Con las condiciones de contorno:

$$M = EI \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad y \quad Q = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} = 0 \quad \text{para} \quad x = \pm \frac{L}{2}$$

La solución es:

$$w = \frac{p}{k} = -2 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

El cálculo de Cross se resume en la tabla 9.

TABLA 9. Cálculo de Cross simétrico.

NUDO	A		B	
BARRA	A-A'	A-B	B-A	B-B'
R	0,4EI	EI	EI	0,7913EI
k	0,29	0,71	0,56	0,44
Y	-	0,5	0,5	-
M <sup>0</sup>	0	-2,14	3,20	0
M <sup>1</sup>	0,62	1,52	-1,79	-1,41
M <sup>2</sup>	0	-0,90	0,76	0
M <sup>3</sup>	0,26	0,64	-0,43	-0,33
M	0,88	-0,88	1,74	-1,74

Los esfuerzos en la sección  $O_1$  se obtienen a partir de la expresión (1), considerando los valores  $A_1$  y  $A_2$  dados en (2) correspondientes a  $M = 1$ . En el caso de  $M = -1,74$  se deduce entonces:

$$u_{O_1} = EI \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=0} = -4EI\beta^2 A_2 \cdot 1,74 = -0,191 \text{ mt.}$$

Evidentemente por simetría  $Q_{O_1} = 0$  y el esfuerzo axial se deduce, mediante consideraciones de equilibrio, que es igual al cortante  $Q_{BA}$ , es decir,  $N_{O_1} = 5,55 \text{ t.}$

Analogamente para la sección  $O_2$  se obtiene:

$$M_{O_2} = 0,88 \text{ mt.}$$

$$N_{O_2} = 2,45 \text{ t.}$$

$$Q_{O_2} = 0$$

9.21.

(a)

BARRA	1-2	2-1	2-4	4-2	4-3	4-5	3-4	5-4	5-6	6-5
$M_\delta$	-0,321	-1,929	1,929	2,679	-0,857	-1,821	0,857	-1,071	1,071	1,179
$M_\theta$	-3,032	-3,160	3,160	3,397	-0,152	-3,594	1,285	-2,340	2,340	2,718

Los momentos finales son:

$$M = M_\delta \bar{\delta} + M_\theta \bar{\theta}$$

$$\text{con } \bar{\delta} = \delta \frac{EI}{a^2} \quad \text{y} \quad \bar{\theta} = \theta \frac{EI}{a}$$

(b)  $\bar{\delta} = 2,259 \bar{\theta} ; \quad \delta = 13,556 \theta$

9.22. a)  $V_1 = 0,36$ ;  $H_1 = -2,00$ ;  $M_1 = 7,43$  (t,m)

$V_5 = 2,64$ ;  $H_5 = -2,00$ ;  $M_2 = 7,43$

b)  $u_2 = u_3 = u_4 = 0,57$  cm.

$\theta_2 = \theta_4 = -0,76 \times 10^{-3}$  rad.;  $\theta_3 = 0,38 \times 10^{-3}$  rad.

Las restantes componentes son nulas.

c)  $K = 120312$  t =  $(E\Omega)_t$

d)  $N_{14} = 4,58$  t.

9.23.

NUDOS RIGIDOS				NUDOS ARTICULADOS
BARRA	AXIL	MOMENTO	CORTANTE	AXIL
1-2	-114,5	65,0	-0,047	-115,5
2-1	-114,5	84,0	-0,047	-115,5
1-3	57	-65,0	-0,831	57,7
3-1	57	267,5	-0,831	57,7
2-3	-1,0	30,3	0,017	0
3-2	-1,0	23,3	-	0
2-4	-56,7	53,6	0	-57,7

9.25.  $v_A = -38,26$  mm (descendente)

9.27.  $u_A = 12,3$  mm (hacia la derecha)

9.28.  $u_A = 319,8$  mt;  $q_A = 0$ ;  $v_A = 97,14$  t.

9.29. a)  $u_D = -58,02$ ;  $q_D = 16,6$  t;  $v_D = 2,09$  t.

c)  $N_{12} = 16,73$  t.

## 10. LINEAS DE INFLUENCIA EN ESTRUCTURAS ENTRAMADOS

### 10.1. INTRODUCCION

El concepto de la línea de influencia surge de un modo natural en la determinación de esfuerzos, reacciones o movimientos, - máximos o mínimos, en una sección de la estructura, cuando actúa sobre una zona especificada de la misma un tren de cargas móvil. La definición de línea de influencia referida a las estructuras articuladas, en el capítulo 6, es completamente aplicable aquí, en el contexto de las estructuras entramados. En general se puede describir la línea de influencia,  $R = R_A(x)$ , de un resultado  $R$  bajo la acción móvil  $A$  (en general unitaria), como la función (\*) que expresa el resultado  $R$  en términos de la abscisa  $x$  que permite definir la posición de la acción móvil,  $A$ . Se comprende que es preciso especificar los siguientes datos en la definición de una línea de influencia: - (a) Tipo de resultado  $R$  -esfuerzo (momento flector, cortante o axil en el caso de entramados), reacción, movimientos (desplazamientos o giros absolutos o relativos) etc- (b) Sección donde el resultado  $R$  se calcula. (c) Acción móvil  $A$  -carga (fuerza horizontal o vertical, o momento) puntual o repartida en una longitud determinada, intensidad (generalmente unitaria)(\*\*). (d) Zona de la estructura de actuación de la carga móvil  $A$ . A veces puede coincidir esta zona con toda la estructura, pero no es preciso. Por ejemplo, en el caso del estudio de la influencia del frenado en un puente pórtico, éste actúa solamente sobre el tablero.

---

NOTA(\*): Desde un punto de vista matemático, la línea de influencia - equivale a la función de Green del problema matemático de - campo correspondiente.

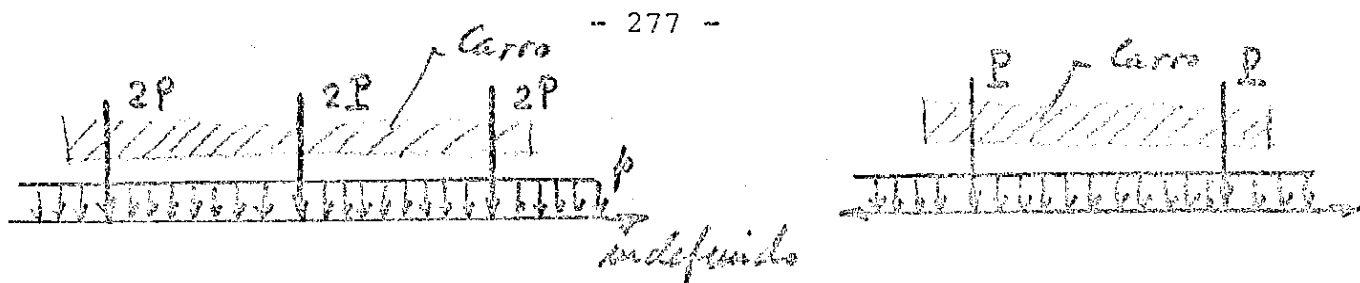
NOTA(\*\*): Esta acción móvil puede estar constituida por un esfuerzo - (análisis que se lleva a cabo en el diseño de los cables de pretensado en las estructuras de hormigón) o bien por una - deformación móvil. No obstante, la acción  $A$  más frecuente es una fuerza puntual.

Conviene recordar que es preciso definir de un modo inequívoco, en la determinación de las líneas de influencia, los criterios de signos que se adoptan, tanto para el resultado  $R$  como para la acción móvil  $A$ .

La utilidad de las líneas de influencia reside en que permiten deducir los resultados  $R$ , máximos y mínimos, que se producen bajo un tren de cargas constituido por acciones  $A_i$  (que corresponden a la acción móvil  $A$  multiplicada por distintos factores  $k_i$ ), separa entre sí distancias invariables. En efecto, basta aplicar el principio de superposición que es válido evidentemente si el cálculo es lineal. En el caso de estructuras para las que el cálculo lineal no sea adecuado, la línea de influencia pierde su utilidad y solamente sirve, a veces, para situar de un modo aproximado las posiciones del tren que inducen resultados  $R$  pésimos en la estructura.

Algunas técnicas de obtención de estos valores más desfavorables del resultado han sido descritas en el capítulo 6 para estructuras articuladas. Sin embargo, la extensión al caso de entramados es directa y no exige ninguna modificación, ya que las líneas de influencia de los esfuerzos y deformaciones de flexión, que evidentemente en estas estructuras adquieren una mayor importancia, pueden ser tratadas de forma completamente análoga a como se lleva a cabo en las líneas de influencia de otros resultados.

Dentro de las estructuras reticulares existen algunas cuya singularidad o importancia exigen un tratamiento de cálculo más exigente. Es el caso de las estructuras de puentes -vigas continuas, arcos, pórticos, etc.-, en los que las líneas de influencia que se estudian corresponden prácticamente a todos los esfuerzos de interés en la estructura y en todas sus secciones. El objetivo de este análisis minucioso es la obtención de las líneas envolventes de los esfuerzos máximos y mínimos que se producen en las distintas secciones de la estructura, bajo la actuación de un tren especificado por las normas,



$1.50\text{ m}$   $1.50\text{ m}$

Longitudinal

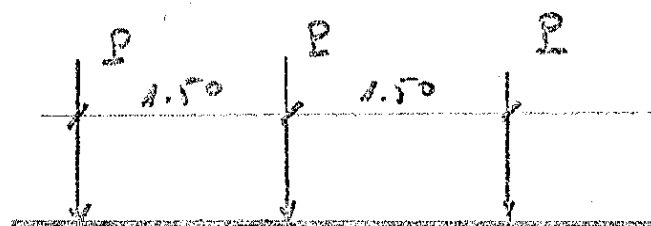
$2.00\text{ m}$

Transversal

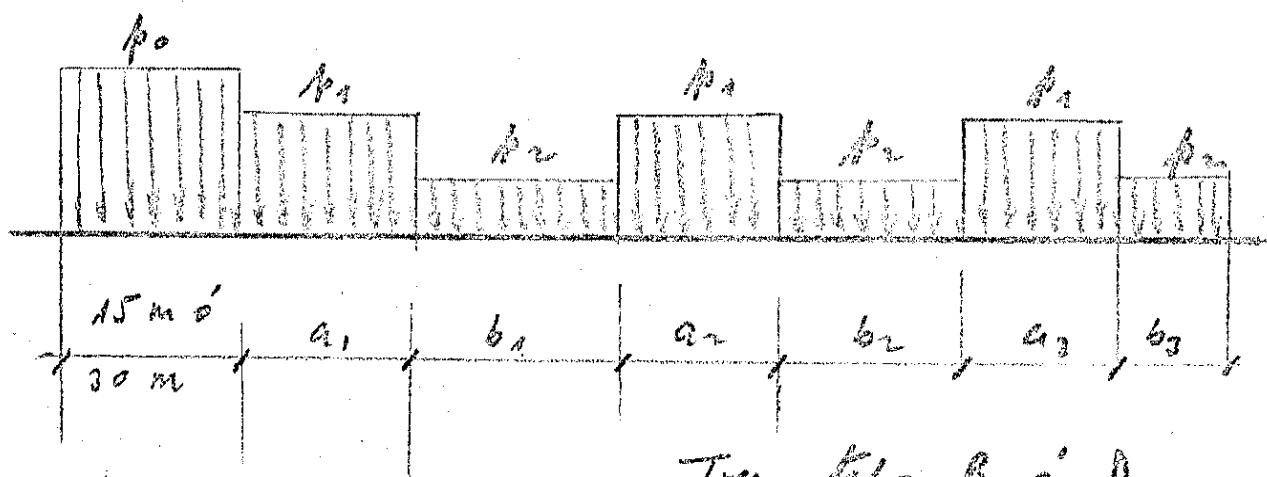
Carga:  $P = 10\text{ t}$ ;  $p = 0,400\text{ tm}^{-2}$

Carro en la posición longitudinal y transversal más desfavorable. Carga uniforme extendida en toda o parte de la superficie del tablero.

(a) Tren de la Instrucción de Carreteras.



Tren tipo A ó C



Tren tipo B ó D

Tren tipo A:  $P = 30\text{ t}$ ; Tren tipo B:  $P = 23\text{ t}$ .

Tren tipo B:  $p_0 = 12\text{ tm}^{-2}$ ;  $p_1 = 10\text{ tm}^{-2}$  y  $p_2 = 1\text{ tm}^{-2}$

Tren tipo D:  $p_0 = 9\text{ tm}^{-2}$ ;  $p_1 = 7\text{ tm}^{-2}$  y  $p_2 = 1\text{ tm}^{-2}$

Los trenes A y B son vía RENFE, y C y D vía métrica.

(a) Tren de la Instrucción de Ferrocarriles.

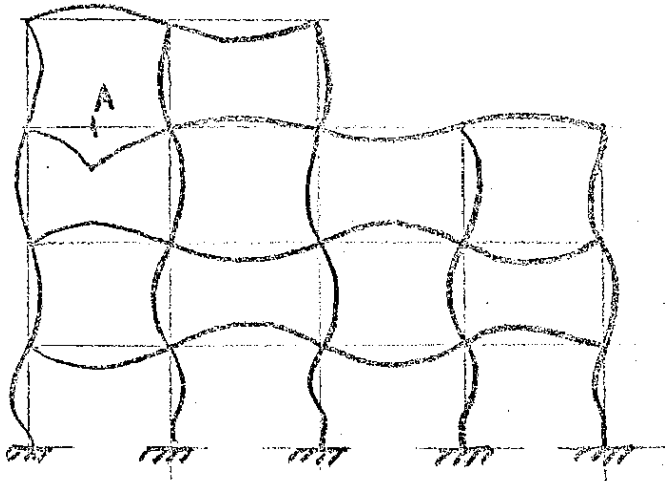
Figura 10.1. Trenes de carga.

e intenta reflejar las cargas de tráfico previsibles. La figura 10.1 representa, por ejemplo, los trenes de las actuales normas de puentes de carreteras y ferrocarril. A veces la determinación de las líneas envolventes anteriores no es suficiente para un correcto dimensionamiento de las secciones y puede ser de interés obtener para cada valor extremo -máximo o mínimo- de un esfuerzo los correspondientes valores acompañantes de los restantes esfuerzos. Así, no sólo es preciso conocer en una sección genérica el máximo momento flector,  $M_{max}$ , que se produce bajo la actuación del tren en la posición  $x_{M_{max}}$  más desfavorable, sino también los valores de los esfuerzos axil y cortante acompañantes, es decir, que en dicha sección aparecen debidos a las cargas del tren situadas en la posición  $x_{M_{max}}$ . Por consiguiente, en el caso general de una estructura entramado, es preciso calcular las siguientes ternas de valores:

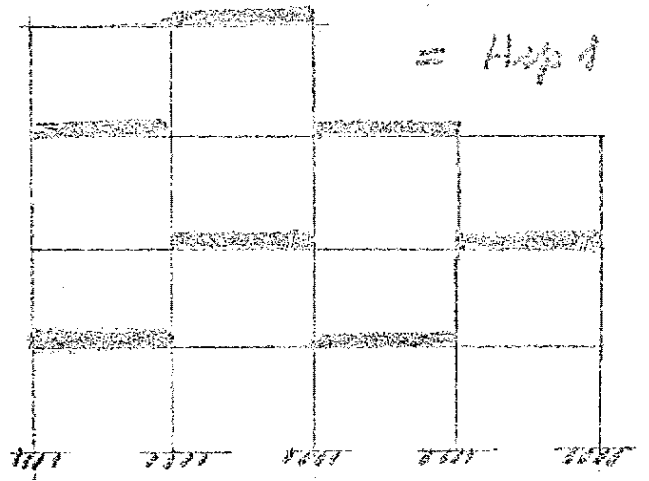
Esfuerzos principales:	$M_{max}$	$M_{min}$	$Q_{max}$	$Q_{min}$	$N_{max}$	$N_{min}$
" acompañantes:	Q	Q	M	M	M	M
	N	N	N	N	Q	Q

Evidentemente, los anteriores comentarios pueden ser aplicables a otros resultados distintos de los esfuerzos.

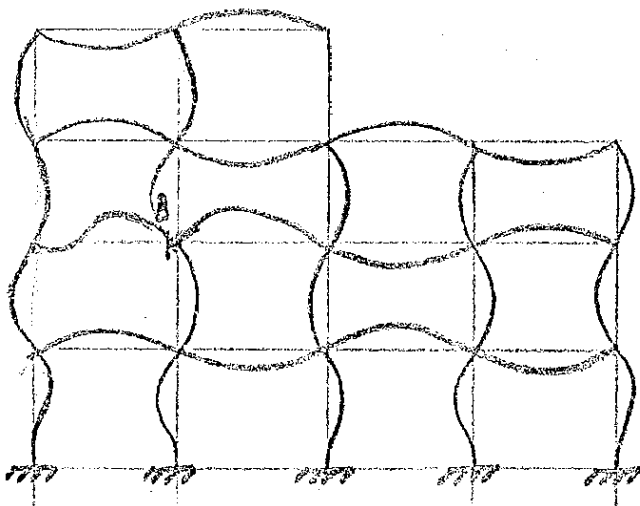
Contrariamente al caso anterior de estructuras importantes, existen otras en que, por su frecuencia de aparición y relativamente escaso valor económico individual, el análisis detallado anterior no se suele llevar a cabo. En particular, en las estructuras de edificación no singulares, se suelen calcular únicamente las secciones de arranques y centro de cada barra, y en las secciones intermedias restantes se supone una variación muy simple de los esfuerzos máximos, según criterios dictados por la experiencia acumulada en el análisis de estas estructuras. Incluso en la determinación de estos esfuerzos máximos y mínimos se suele llevar a cabo una serie de simplificaciones que se indican en la figura 10.2. En ella se representan a estimas las líneas de influencia de algunos esfuerzos en una estructura típica



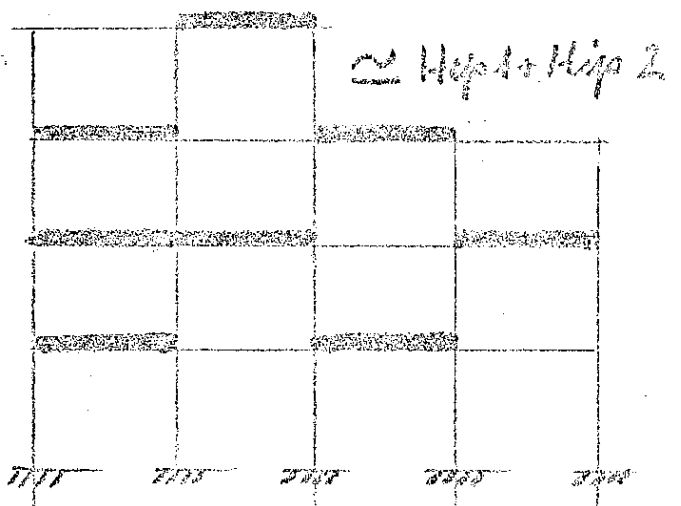
Línea de influencia del momento flector en A



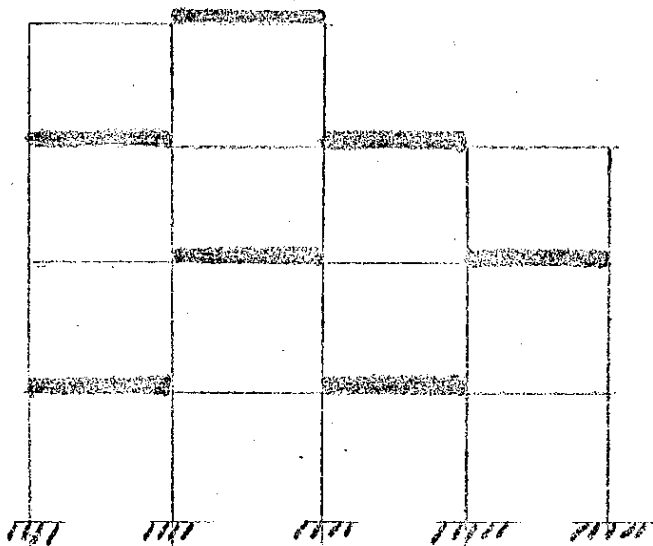
Hipótesis de carga ( $M_{Amax}$ )



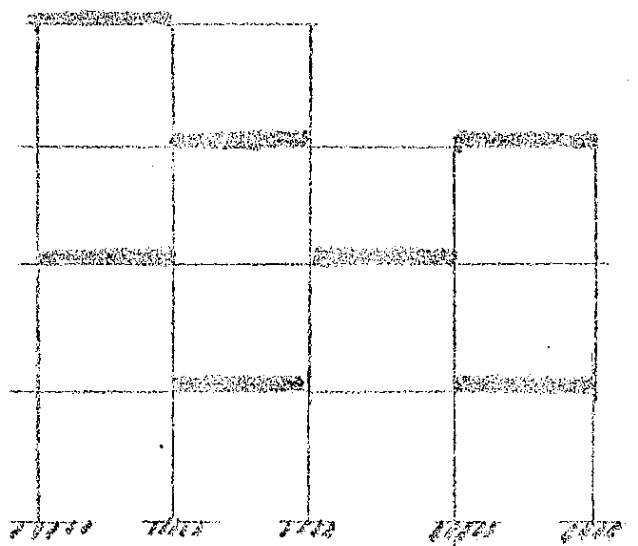
Línea de influencia del momento flector en B



Hipótesis de carga ( $M_{Bmin}$ )



Hipótesis básica de carga (1)



Hipótesis básica de carga (2)

Figura 10.2. Estructuras de edificación.



ca de edificación, haciendo uso del teorema de reciprocidad o de - Maxwell. Sin embargo, esta posición de la carga más desfavorable se aproxima mediante combinación de las dos hipótesis de cargas (1) y (2) -denominadas en "damsero"- y que en la mayoría de los casos conducen a resultados suficientemente aproximados. Para que esta sustitución de la carga sea adecuada es preciso que la estructura sea suficientemente regular sin excesivas diferencias entre las luces de los vanos contiguos. La acción fija de peso propio se puede en esta situación obtener frecuentemente como combinación lineal de las hipótesis de carga (1) y (2).

Se comprende que las consideraciones que siguen son aplicables especialmente a las estructuras pertenecientes al tipo primero, es decir, que presentan una cierta singularidad por sus dimensiones, esquema estructural o economía. La determinación de las líneas de influencia se puede realizar utilizando el teorema de reciprocidad o bien mediante combinación de estados de cargas unitarios (método de los momentos 100, en estructuras intraslacionales, o de los esfuerzos 100 en las traslacionales). De todos ellos se exponen sus características más importantes (\*).

## 10.2. METODO DE LOS ESFUERZOS UNITARIOS

### 10.2.1. Consideraciones previas

En esencia este método consiste en calcular el resultado R de una línea de influencia para una posición genérica de la acción,

---

NOTA (\*): Existe, naturalmente, el procedimiento de obtención de la línea de influencia mediante aplicación de su definición, es decir, calcular el valor del resultado R para distintas funciones x de la acción A. Los resultados intermedios pueden deducirse mediante interpolación. Evidentemente, dado el elevado volumen de cálculo que normalmente exige este método de obtención de líneas de influencia, no se describe aquí.

como combinación de varios estados de carga. Cada uno de estos estados corresponde a las fuerzas que aparecen en el desequilibrio de la solución inicial. Como en las estructuras intraslacionales las únicas fuerzas que se encuentran no equilibradas corresponden a los momentos, y, por el contrario, en las estructuras de nudos desplazables existen, además de estos momentos, fuerzas procedentes del desequilibrio de los esfuerzos cortantes y axiles de la estructura, es conveniente estudiar separadamente ambas situaciones.

#### 10.2.2. Estructuras intraslacionales. Método de los momentos 100

Sea una estructura intraslacional arbitraria, como se muestra de un modo genérico en la figura 10.3a. La determinación de la ordenada,  $R = R(x)$ , de la línea de influencia para la acción A, definida por la abscisa  $x$ , se puede deducir simplemente calculando la estructura para la carga en dicha posición. Sin embargo, con objeto de evitar el esfuerzo que implica dicho cálculo para los sucesivos valores de  $x$  o posiciones de la acción móvil, se recurre a la superposición definida en la figura 10.3.

Si  $R^0(x)$  y  $R^1(x)$  representan los valores del resultado correspondientes a las soluciones inicial y modal respectivamente, el primero es nulo, en el caso de que la carga móvil no se encuentre situada en la viga que contiene la sección cuyo resultado  $R$  de la línea de influencia se desea obtener. En caso contrario, el valor  $R^0(x)$  se calcula directamente o bien mediante tablas, suponiendo la viga biempotrada (a todos los movimientos) en sus extremos y con la carga en la posición correspondiente a la abscisa  $x$  (\*). Por otra parte, el valor del resultado correspondiente a la solución modal se puede

---

NOTA(\*): En la figura 10.3 se ha representado la acción móvil como una fuerza vertical puntual. En el caso general de acciones arbitrarias, el procedimiento expuesto en el texto no sufre modificación.

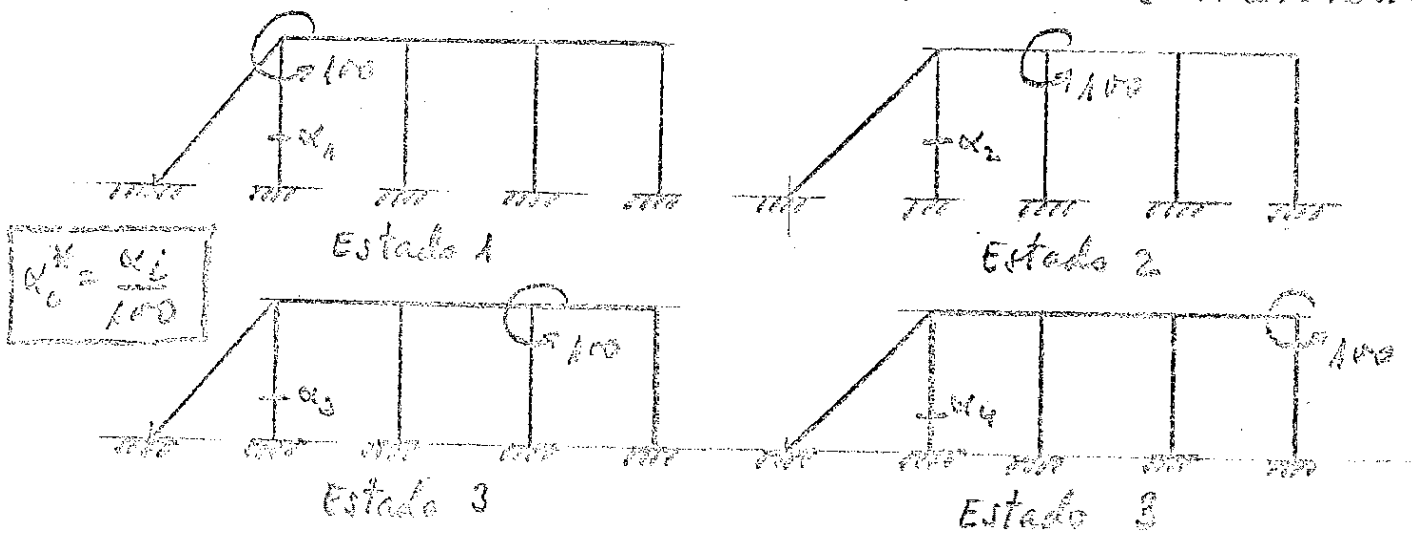
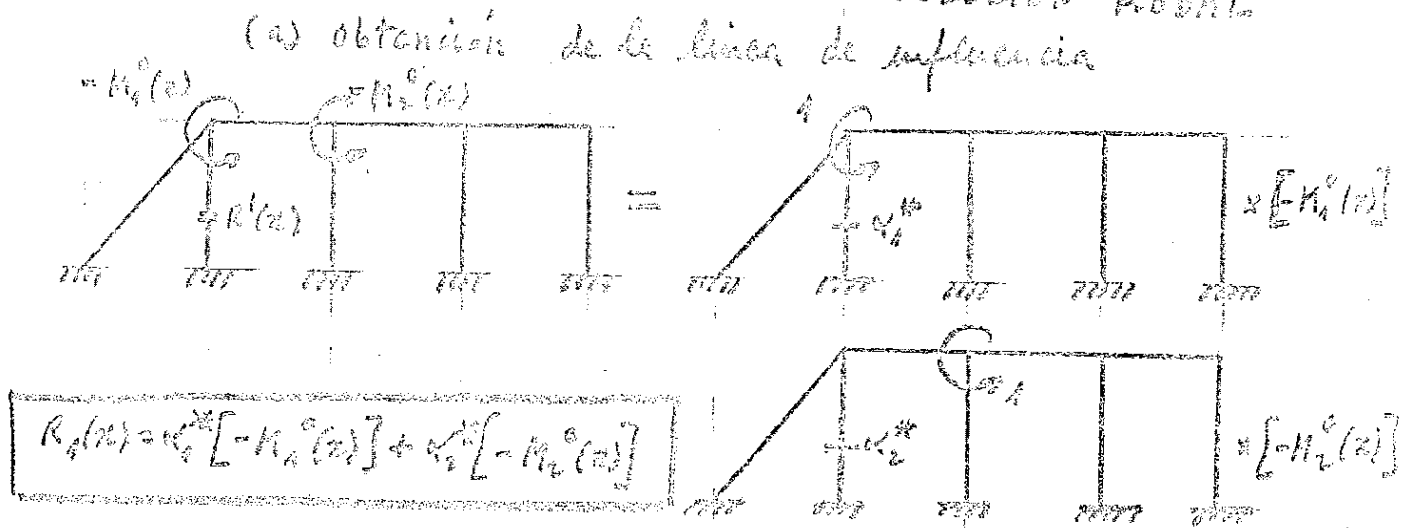
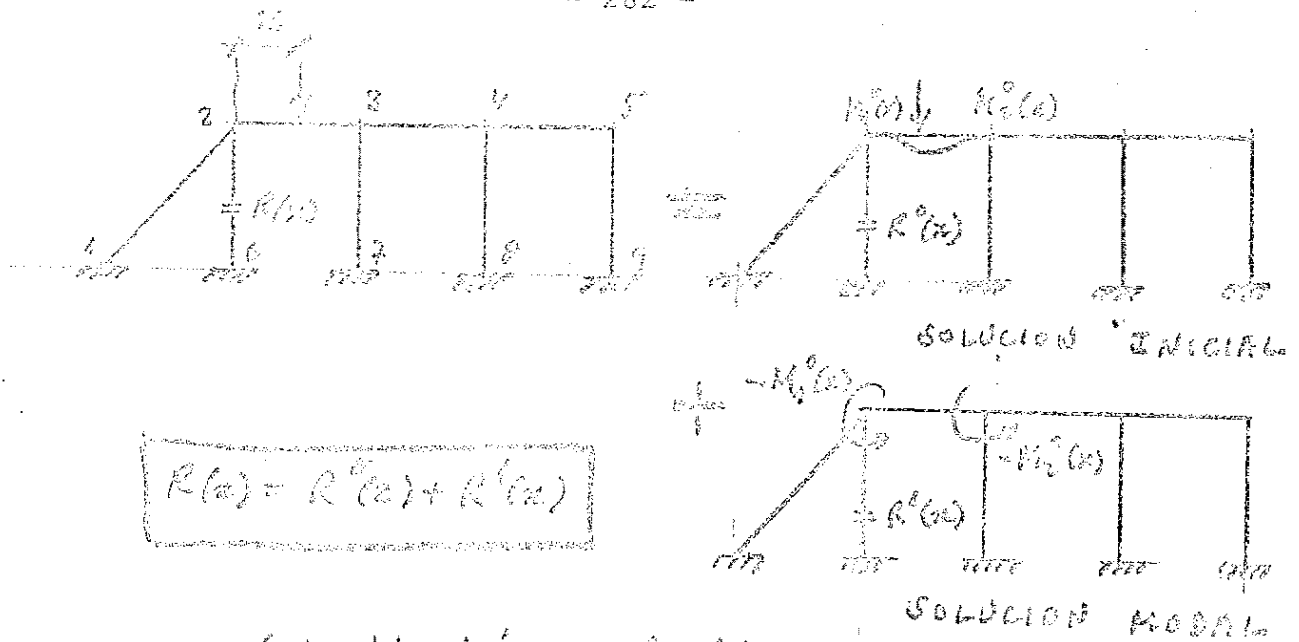


Figura 10.3. Método de los momentos 100. Exteriores a los nudos.

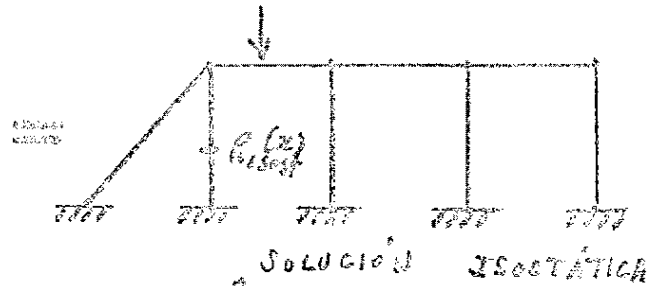
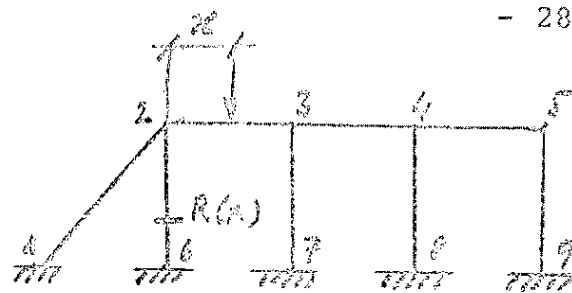
obtener como combinación de dos estados de momentos unidad, tal como se muestra en la figura 10.3b. En la práctica, se suelen llevar a cabo las operaciones numéricas con un número de cifras determinado, por lo que para evitar decimales se consideran los estados constituidos por momentos exteriores de valor 100 en la situación práctica de tener en cuenta únicamente dos cifras decimales, como es el caso frecuente-, y de ahí el nombre de momentos 100 con el que se conoce a este método. El número de estados unitarios o con momentos 100 que se calculan en el caso de carga móvil sobre el dintel de la estructura de la figura 10.3 es de cuatro-uno por cada nudo del dintel- y se representan en la misma figura. Los valores de los esfuerzos  $M_1^0(x)$  y  $M_2^0(x)$  se obtienen según el tipo de acción móvil, como los momentos de empotramiento rígido que aparecen en la barra bajo dicha acción. Por ejemplo, si la acción es una carga puntual unitaria gravitatoria (dirigida hacia abajo), los momentos de empotramiento rígido en una viga horizontal de luz L y sección constante son:

$$M_1^0 = PL\left(\frac{x}{L}\right)\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)$$

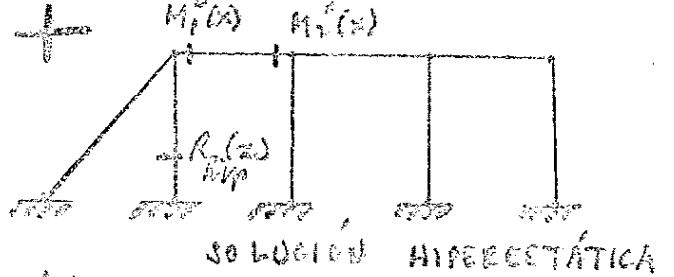
$$M_2^0 = -PL\left(\frac{x}{L}\right)^2\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$
(10.1)

con x la distancia de la sección de aplicación de la carga al extremo 1 (izquierdo) de la barra.

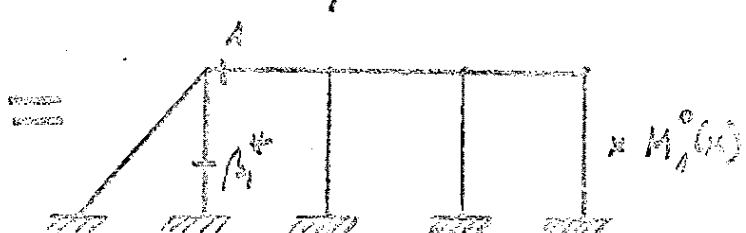
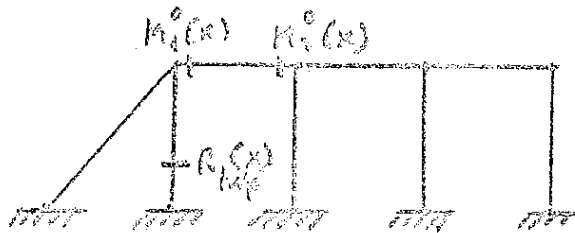
A veces, y con objeto de aprovechar los resultados finales de Cross, que son los momentos finales -suma de los estados inicial y modal del cálculo-, se suele considerar que los estados básicos de cálculo son momentos de empotramiento rígido -unitarios o 100-, aplicados sucesivamente sobre cada uno de los extremos de las barras del dintel. Entonces, de acuerdo con lo indicado en la figura 10.4, deben de descomponerse los valores de la línea de influencia  $R(x)$  como suma de los dos estados - $R_{isos}(x)$  y  $R_{hip}(x)$ - isostático e hiperestático. Como antes del estado isostático conduce a valores del resultado - $R_{isos}(x)$ -



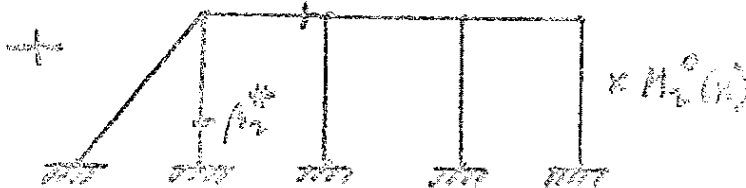
$$R(x) = R_{isost}(x) + R_{hip}(x)$$



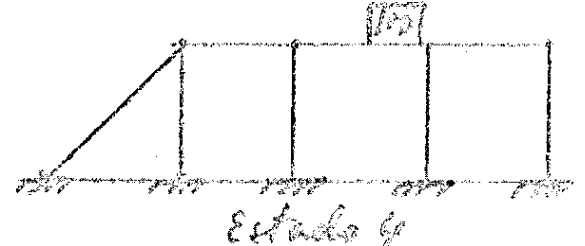
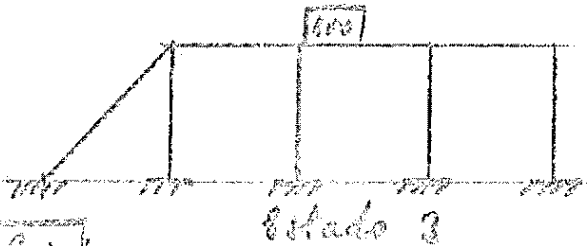
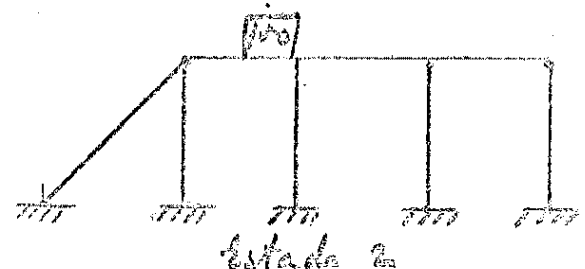
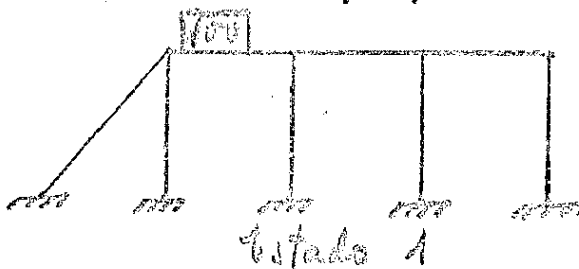
(a) Obtención de la línea de influencia



$$R_{hip}(x) = \beta_1^* M_1^0(x) + \beta_2^* M_2^0(x)$$



(b) Superposición de estados. Momentos exteriores a barras.



$$\beta_i^* = \beta_i / 100$$

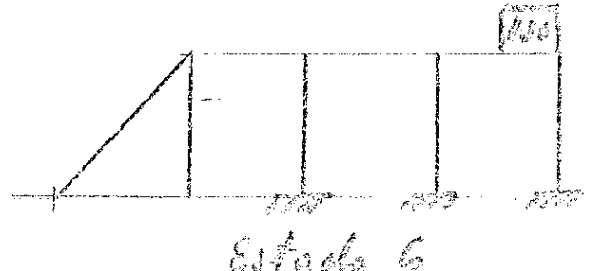
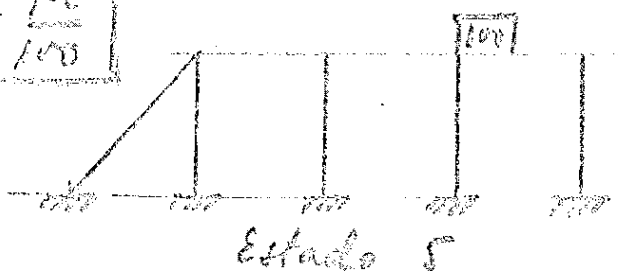


Figura 10.4. Método de los momentos 100, exteriores a las barras.

distintos de cero únicamente cuando la carga actúa en el vano en el que se encuentra situada la sección de  $R(x)$ .

El resultado hiperestático se deduce, por consiguiente, como combinación de los estados básicos representados en la figura 10.4c. Se comprueba que si bien el número de estados básicos se ha incrementado respecto al procedimiento anterior -de cuatro a siete-, en realidad el esfuerzo de cálculo es idéntico, ya que los resultados de los Cross, en este caso, se deducen inmediatamente de los cálculos de la figura 10.3c -correspondientes a momentos unitarios en los nudos-, según se indica de un modo esquemático en la figura 10.5

El siguiente ejemplo 10.1 ilustra las ideas anteriores, así como el procedimiento práctico de cálculo.

Ejemplo 10.1. Determinar las líneas de influencia de los siguientes resultados:

- 1) Momento flector en A.
- 2) Esfuerzo cortante en B.
- 3) Momento flector en C.
- 4) Flecha (movimiento vertical) en D.

de la estructura de la figura 10.6a, cuando una carga vertical unidad gravitatoria recorre el dintel. Todas las vigas son de  $0,40 \times 0,4 \text{ m}$  y el módulo de elasticidad es  $E = 2 \times 10^6 \text{ tm}^{-2}$ . Las ordenadas de las líneas de influencia se darán cada metro.

Los estados básico de cálculo son cuatro y se representan en la figura 10.6b. Los estados E-1 y E-4, no precisan ser calculados, puesto que el momento exterior al nudo es absorbido íntegramente por el empotramiento. Por otra parte, dada la simetría de la estructura, el estado E-3 se deduce directamente del estado E-2. Este se calcu-

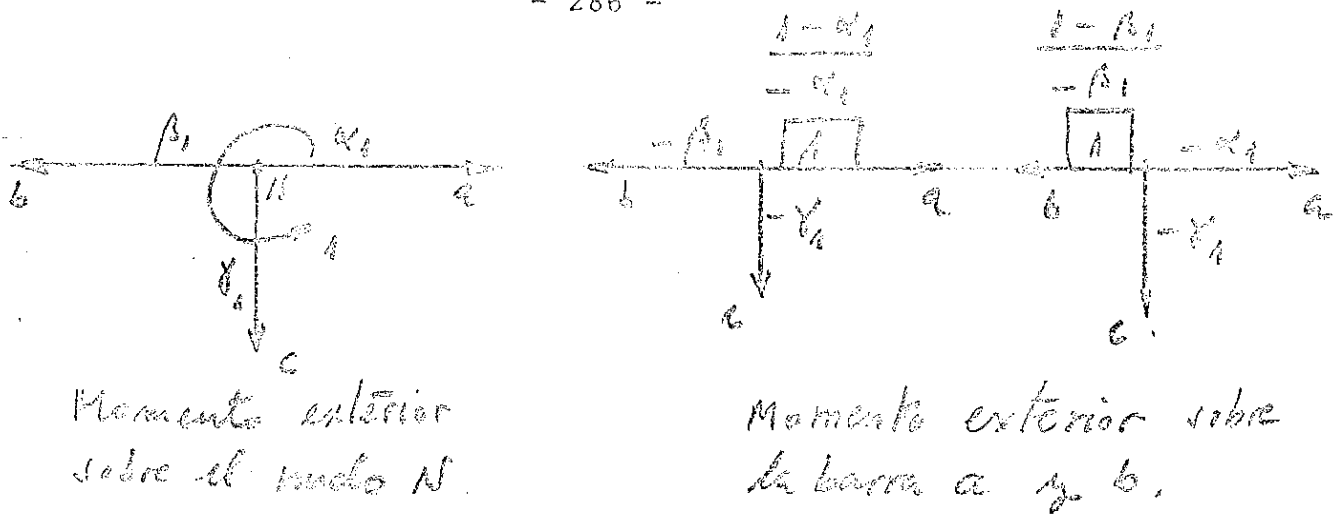


Figura 10.5. Obtención de los resultados del método de Cross.

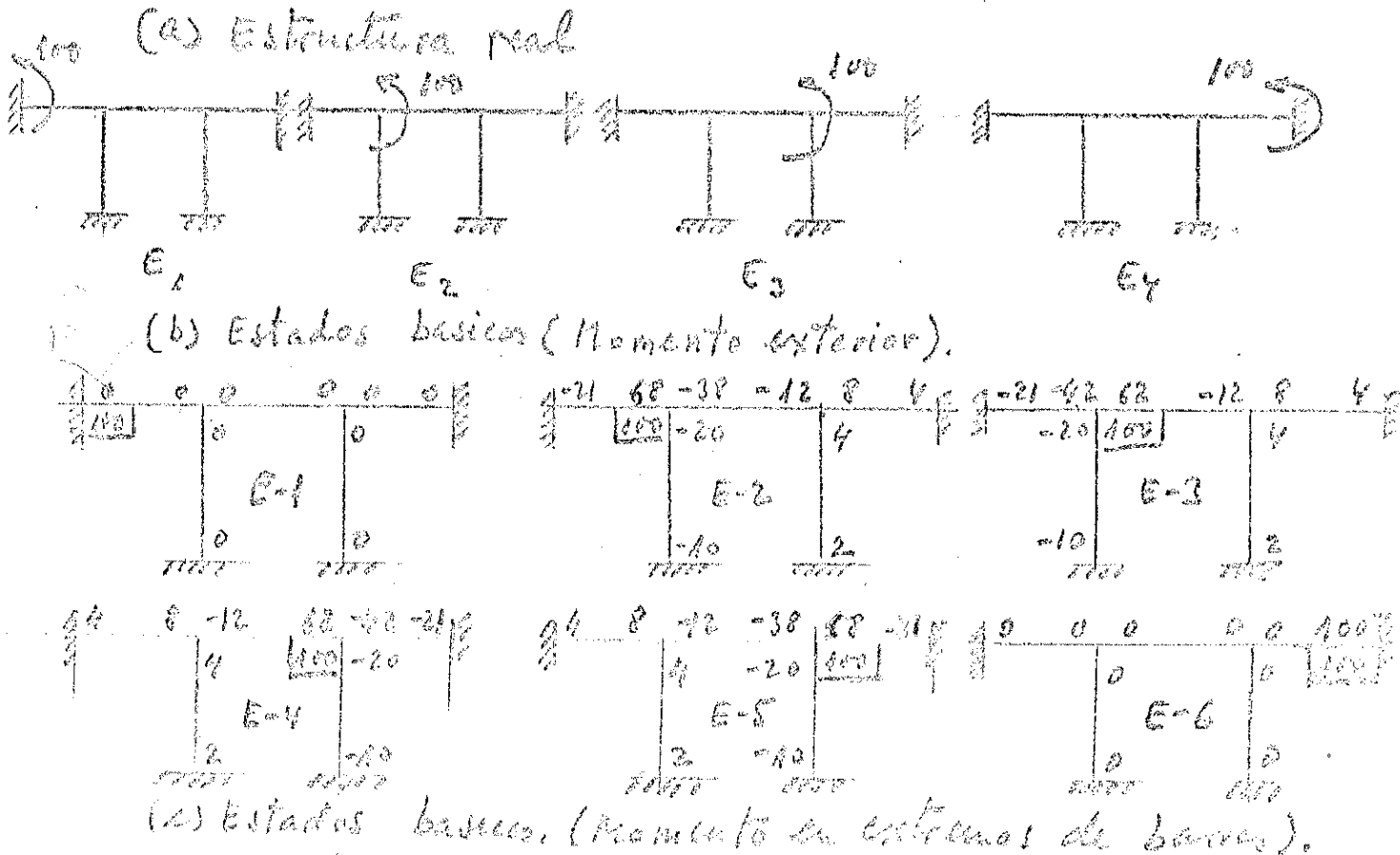
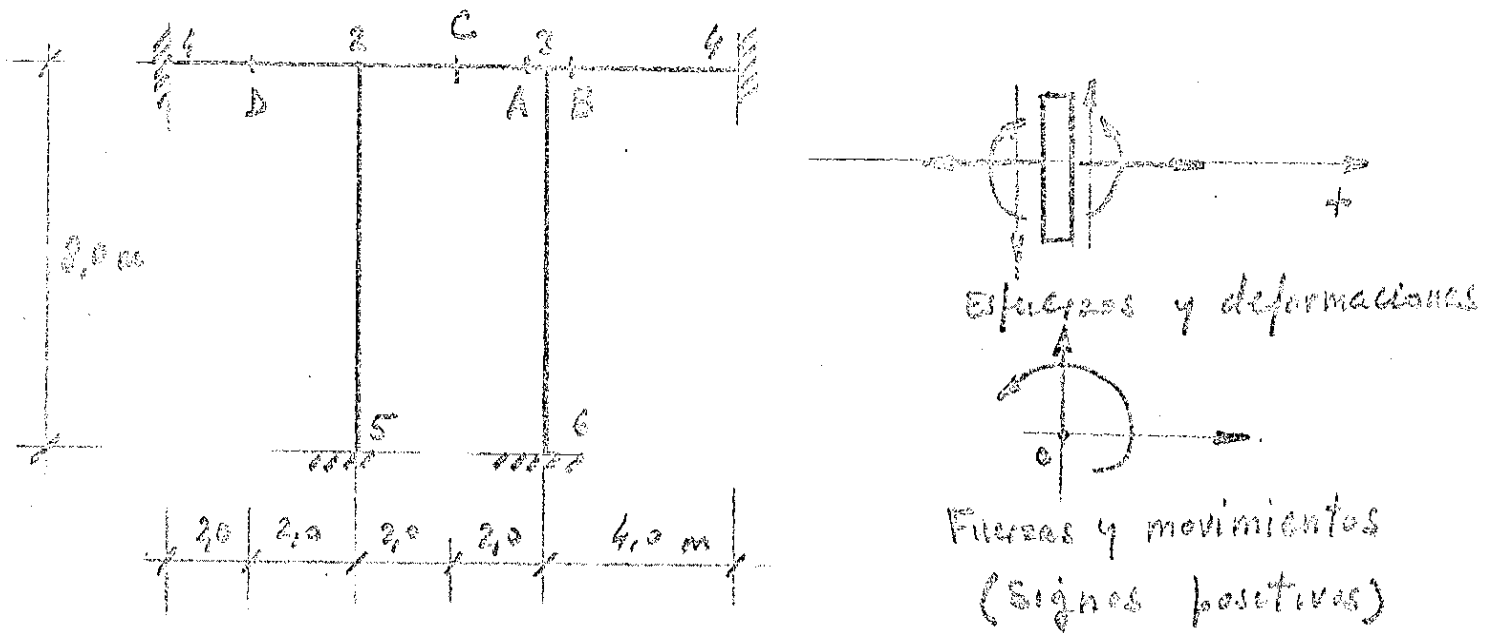


Figura 10.6. Ejemplo 10.1. Cálculo.

la mediante el Cross que se desarrolla en la tabla 10.1(\*).

TABLA 10.1. Cálculo de Cross del estado E-2.

MOMENTO EXT.	100			0		
NUDO	2			3		
BARRA	2-1	2-5	2-3	3-2	3-6	3-4
R/EI	2	1	2	2	1	2
k	0,4	0,2	0,4	0,4	0,2	0,4
$M^0$	0	0	0	0	0	0
$M^1$	40	20	40	0	0	0
$M^2$	0	0	0	20	0	0
$M^3$	0	0	0	-8	-4	-8
$M^4$	0	0	-4	0	0	0
$M^5$	2	0	2	0	0	0
M	42	20	38	12	-4	-8

Los momentos en los nudos 1, 4, 5 y 6 son:

$$M_{12} = 21 ; M_{43} = -4 ; M_{52} = 10 \text{ y } M_{63} = -2$$

NOTA(\*): Probablemente es más eficiente la descomposición del momento en una sollicitación simétrica y otra antimétrica, con lo que los dos cálculos de Cross resultantes se reducen a un nudo, y por lo tanto, se precisa un solo reparto de momentos.



A partir de los resultados de este cálculo de Cross, se deducen los valores de los momentos en los extremos de las barras en cada uno de los estados de carga, representados por un momento de empotramiento rígido 100 en un extremo de barra. La figura 10.6c recoge estos resultados, que son necesarios para la determinación de las distintas líneas de influencias en la estructura.

1) Línea de influencia del momento flector en A.

Con el criterio de signos usual para los momentos (acciones) y momentos flectores (esfuerzos), se puede escribir:

$$\mu_A = M_{32}$$

Los valores de los coeficientes  $\beta_i$  para los seis casos de carga ( $i=1,2,\dots,6$ ) se resumen en la tabla 10.2, así como los momentos de empotramiento rígido  $M_1^0$  y  $M_2^0$  producidos por una carga unidad expresados por la fórmula (10.1), puesto que las vigas son de sección constante.

El momento flector en la sección A,  $\mu_A$ , se deduce por superposición para el vano  $i$ , mediante la fórmula:

$$\mu_A = \beta_{2i-1} M_1^0 + \beta_{2i} M_2^0 \quad (10.2)$$

con  $M_1^0$  y  $M_2^0$  los citados momentos de empotramiento rígido producidos por la carga unidad aplicada en el vano  $i$ . Los valores de  $\beta_i$  ( $i=1,6$ ) corresponden a los resultados del estado E- $i$  de la figura 10.6c del momento  $M_{32}$  dividido por 100, es decir:

$$\beta_i = \frac{M_{32}^{(i)}}{100}$$

Se observa que no existen resultados isostáticos, correspondientes a los momentos, es decir,  $\mu_{A_{isost.}}$ .

TABLA 10.2. Línea de influencia de  $\mu_A$ .

APLICACION DE LA CARGA		MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO RIGIDO		COEFICIENTES DEL VANO i		$\mu_A = \beta_{2i-1} M_1^0 + \beta_{2i} M_2^0$
VANO	SECCION	$M_1^0$	$M_2^0$	$\beta_{2i-1}$	$\beta_{2i}$	
i = 1	x = 0	0	0	0	-0,12	0
	x = 1	0,5625	-0,1875	0	-0,12	0,0225
	x = 2	0,5	-0,5	0	-0,12	0,0600
	x = 3	0,1875	-0,5625	0	-0,12	0,0665
	x = 4	0	0	0	-0,12	0
i = 2	x = 0	0	0	-0,12	0,62	0
	x = 1	0,5625	-0,1875	-0,12	0,62	-0,1835
	x = 2	0,5	-0,5	-0,12	0,62	-0,3700
	x = 3	0,1875	-0,5625	-0,12	0,62	-0,3715
	x = 4	0	0	-0,12	0,62	0
i = 3	x = 0	0	0	-0,38	0	0
	x = 1	0,5625	-0,1875	-0,38	0	-0,2140
	x = 2	0,5	-0,5	-0,38	0	-0,1905
	x = 3	0,1875	-0,5625	-0,38	0	-0,0712
	x = 4	0	0	-0,38	0	0

La línea de influencia obtenida se representa en la figura 10.7a.

2) Línea de influencia del cortante  $q_B$ .

El cortante  $q_B$  se deduce de los resultados finales del Cross como sigue:

$$q_B = - \frac{M_{34} + M_{43}}{L_{34}} + q_{B \text{ isost.}}$$

con  $q_{B_{isost.}}$  el valor del cortante isostático, que aparece si existen cargas directamente aplicadas en el vano 34, y  $L_{34}$  es la luz de dicho vano.

El cortante  $q_B$  se deduce como superposición de los seis estados básicos de la figura 10.6c, mediante la fórmula:

$$q_B = \beta_{2i-1} M_1^0 + \beta_{2i} M_2^0 + q_{B_{isost.}} \quad (10.3)$$

siendo  $\beta_i$  el coeficiente correspondiente al cortante  $q_B$  que se produce por un momento de empotramiento unitario en una barra según el estado E-i, es decir:

$$\beta_i = - \frac{M_{34}^{(2)} + M_{43}^{(2)}}{L_{34}} \cdot \frac{1}{100} \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

Si la carga está situada en el vano 3-4, a una distancia  $x$  del extremo 3, el valor del cortante isostático en la sección B es:

$$q_{B_{isost.}} = -\left(1 - \frac{x}{L_{34}}\right)$$

En otra situación este cortante es nulo.

La tabla 10.3 permite expresar de un modo sumario el cálculo de la línea de influencia de  $q_B$ .

TABLA 10.3. Línea de influencia de  $q_B$ .

APLICACION DE LA CARGA		MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO RIGIDO		COEFICIENTES DEL VANO i		$q_{B_{isost}}$	$q_B = \beta_{2i-1} M_1^0 + \beta_{2i} M_2^0 + q_{B_{isost}}$
VANO	SECCION	$M_1^0$	$M_2^0$	$\beta_{2i-1}$	$\beta_{2i}$		
i = 1	x = 0	0	0	0	-0,03	-	0
	x = 1	0,5625	-0,1875	0	-0,03	-	0,0056
	x = 2	0,5	-0,5	0	-0,03	-	0,0150
	x = 3	0,1875	-0,5625	0	-0,03	-	0,0169
	x = 4	0	0	0	-0,03	-	0
i = 2	x = 0	0	0	-0,03	0,1575	-	0
	x = 1	0,5625	-0,1875	-0,03	0,1575	-	-0,0464
	x = 2	0,5	-0,5	-0,03	0,1575	-	-0,0938
	x = 3	0,1875	-0,5625	-0,03	0,1575	-	-0,0942
	x = 4	0	0	-0,03	0,1575	-	0
i = 3	x = 0	0	0	-0,1175	-0,3333	-1,000	-1,0000
	x = 1	0,5625	-0,1875	-0,1175	-0,3333	-0,750	-0,7552
	x = 2	0,5	-0,5	-0,1175	-0,3333	-0,500	-0,4212
	x = 3	0,1875	-0,5625	-0,1175	-0,3333	-0,250	-0,1267
	x = 4	0	0	-0,1175	-0,3333	-0,000	0

La figura 10.7b representa esta línea de influencia.

### 3) Línea de influencia del momento flector $\mu_C$ .

De un modo semejante al caso anterior se deduce la fórmula siguiente:

$$\mu_C = \beta_{2i-1} M_1^0 + \beta_{2i} M_2^0 + \mu_{C_{isost.}} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10.4)$$

siendo  $M_1^0$  y  $M_2^0$  los momentos de empotramiento rígido en los extremos 1 y 2 de la barra  $i$ , cuando actúa una carga unidad sobre ella.

$\beta_i$  es un coeficiente ( $i=1,2,\dots,6$ ) deducido a partir de los resultados finales de los momentos del estado  $i$  de carga, indicado en la figura 10.6c. Su expresión, en función de estos momentos, es:

$$\beta_i = \frac{M_{32}^{(i)} - M_{23}^{(i)}}{2}$$

$\mu_{C_{isost.}}$  corresponde al momento flector isostático que se produce en la sección central C del vano 2-3 cuando la carga actúa en dicho vano 2-3 (en otro caso es nulo), y su valor es, suponiendo que la carga dista  $x$  del vano extremo 2 de la barra, el siguiente:

$$\mu_{C_{isost.}} = \frac{x}{2} \quad \text{si} \quad x \leq \frac{L_{23}}{2}$$

$$\mu_C = \frac{L_{23} - x}{2} \quad \text{si} \quad x \geq \frac{L_{23}}{2}$$

La fórmula 10.4 permite construir la tabla 10.4 en la que se calcula de un modo ordenado la línea de influencia del momento flector  $\mu_A$ , en la sección central del vano 2-3.

TABLA 10.4 Línea de influencia de  $\mu_C$ .

APLICACION DE LA CARGA		MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO RIGIDO		COEFICIENTES DEL VANO i		$\mu_{C_{isost.}}$	$\mu_C$
VANO	SECCION	$M_1^0$	$M_2^0$	$\beta_{2i-1}$	$\beta_{2i}$		
i = 1	x = 0	0	0	0	0,13	-	0
	x = 1	0,5625	-0,1875	0	0,13	-	-0,0244
	x = 2	0,5	-0,5	0	0,13	-	-0,0650
	x = 3	0,1875	-0,5625	0	0,13	-	-0,0731
	x = 4	0	0	0	0,13	-	0
i = 2	x = 0	0	0	-0,37	0,37	0	0
	x = 1	0,5625	-0,1875	-0,37	0,37	0,5	0,2225
	x = 2	0,5	-0,5	-0,37	0,37	1,0	0,6300
	x = 3	0,1875	-0,5625	-0,37	0,37	0,5	0,2225
	x = 4	0	0	-0,37	0,37	0	0
i = 3	x = 0	0	0	-0,13	0	-	0
	x = 1	0,5625	-0,1875	-0,13	0	-	-0,0731
	x = 2	0,5	-0,5	-0,13	0	-	-0,0650
	x = 3	0,1875	-0,5625	-0,13	0	-	-0,0244
	x = 4	0	0	-0,13	0	-	0

La línea de influencia de  $\mu_C$  se muestra en la figura 10.7c.

4) Línea de influencia de la flecha  $v_D$ .

Es fácil deducir la expresión siguiente de la flecha que se produce en la sección central D, del vano 1-2.

$$v_D = \beta_{2i-1} M_1^0 + \beta_{2i} M_2^0 + v_{D_{isost.}} \quad (10.5)$$

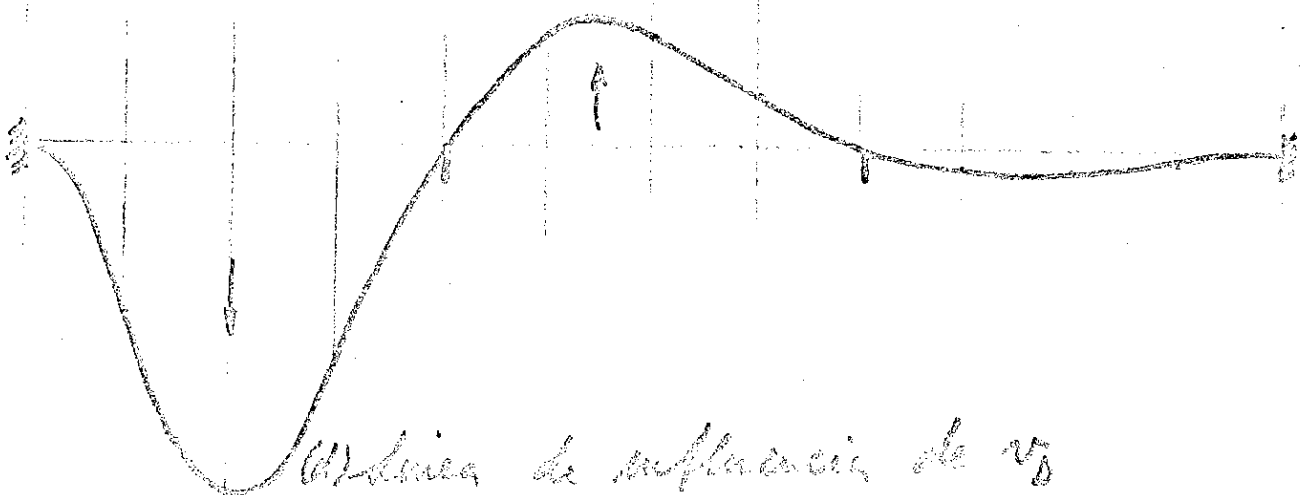
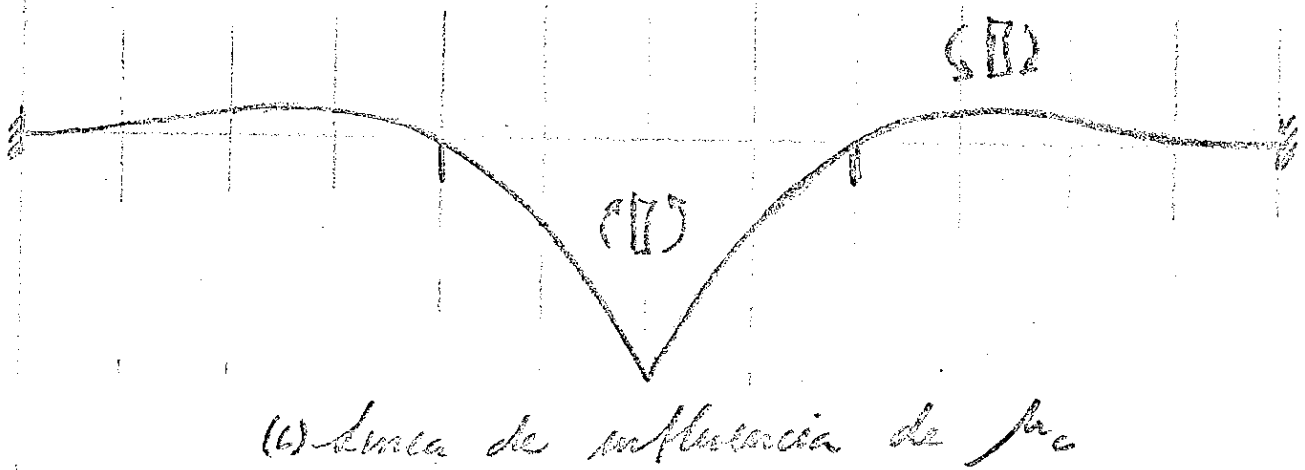
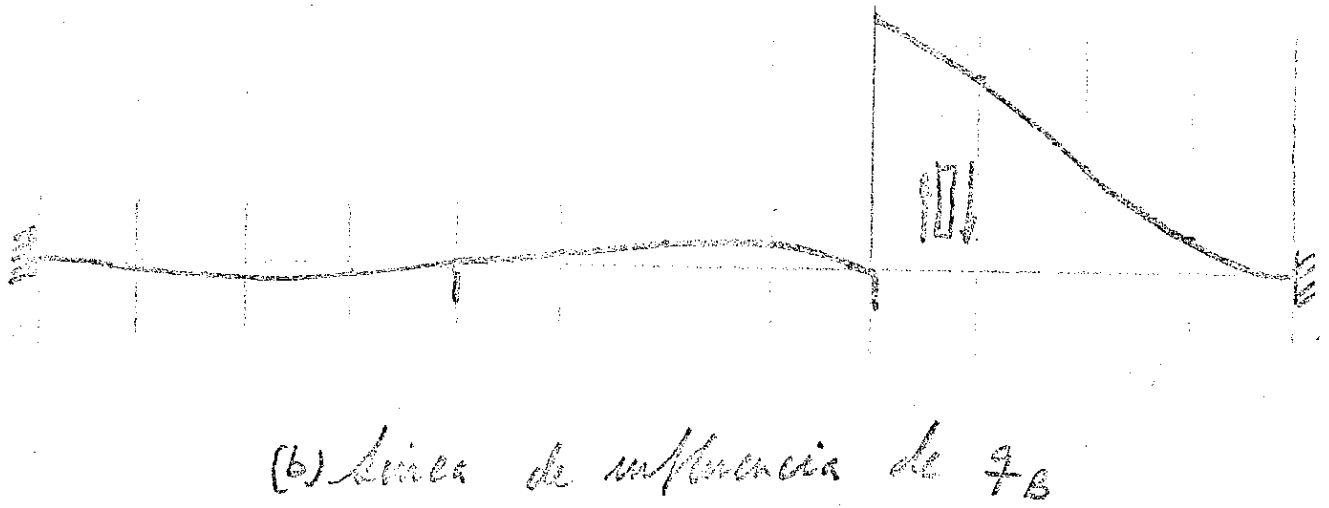
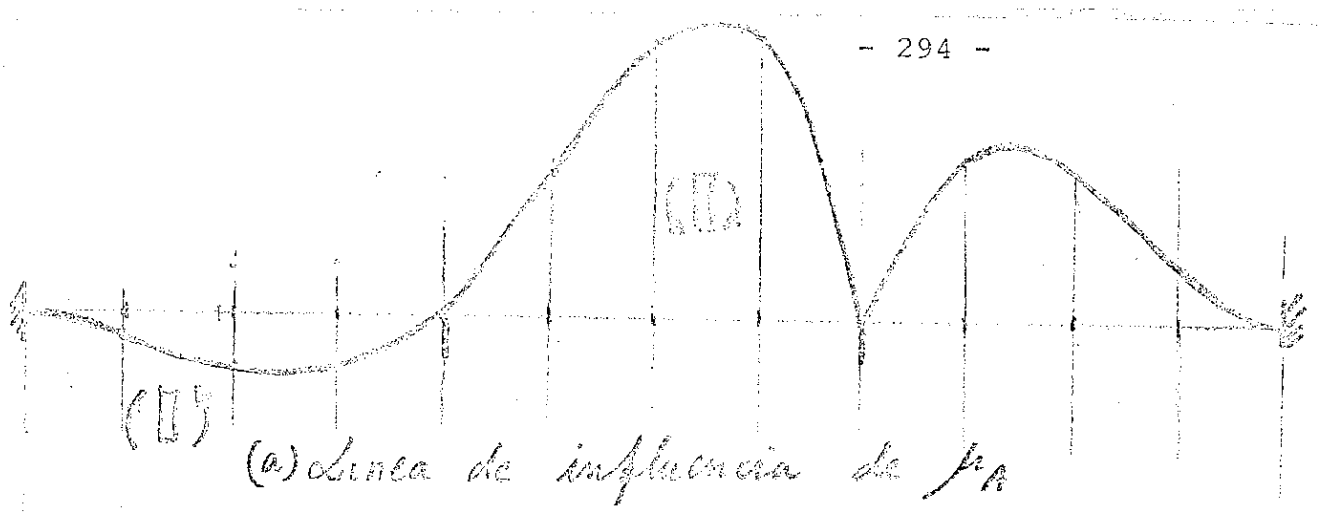


Figura 10.7. Ejemplo 10.1. Líneas de influencia.

con el mismo significado para  $M_1^0$  y  $M_2^0$  que en (10.4). El coeficiente  $\beta_i$ , correspondiente al estado  $i$  de la figura 10.6c, es:

$$\beta_i = \left( \frac{0,375}{6EI} M_{12}^{(i)} - \frac{0,375}{6EI} M_{21}^{(i)} \right) L_{12}^2 = 0,234 (M_{12}^{(i)} - M_{21}^{(i)})$$

$v_{D_{isost.}}$  corresponde a la flecha isostática que se produce en la sección central D del vano 1-2 cuando actúa la carga directamente en dicho vano y su valor es, para la carga distante  $x$  del extremo 1:

$$v_{D_{isost.}} = - \frac{L_{12}^3}{12EI} \bar{x} \left( \frac{3}{4} - \bar{x}^2 \right) \quad \text{si} \quad x \leq \frac{L_{12}}{2}$$

$$v_{D_{isost.}} = - \frac{L_{12}^3}{12EI} (1-\bar{x}) \left( 2\bar{x} - \bar{x}^2 - \frac{1}{4} \right) \quad \text{si} \quad x \geq \frac{L_{12}}{2}$$

con

$$\bar{x} = \frac{x}{L_{12}}$$

La fórmula 10.5 permite efectuar una serie de cálculos ordenados de los distintos valores de la línea de influencia, que se resumen en la tabla 10.5.



TABLA 10.5. Línea de influencia de  $v_D (x 10^3)$ .

APLICACION DE LA CARGA		MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO RIGIDO		COEFICIENTES DEL VANO i		$v_{D_{isost.}}$	$v_D$
VANO	SECCION	$M_1^0$	$M_2^0$	$\beta_{2i-1}$	$\beta_{2i}$		
i = 1	x = 0	0	0	0,234	-0,109	0	0
	x = 1	0,5625	-0,1875	0,234	-0,109	-0,215	-0,049
	x = 2	0,5	-0,5	0,234	-0,109	-0,313	-0,100
	x = 3	0,1875	-0,5625	0,234	-0,109	-0,215	-0,057
	x = 4	0	0	0,234	-0,109	0	0
i = 2	x = 0	0	0	0,049	-0,009	-	0
	x = 1	0,5625	-0,1875	0,049	-0,009	-	0,029
	x = 2	0,5	-0,5	0,049	-0,009	-	0,029
	x = 3	0,1875	-0,5625	0,049	-0,009	-	0,014
	x = 4	0	0	0,049	-0,009	-	0
i = 3	x = 0	0	0	-0,009	0	-	0
	x = 1	0,5625	-0,1875	-0,009	0	-	-0,005
	x = 2	0,5	-0,5	-0,009	0	-	-0,005
	x = 3	0,1875	-0,5625	-0,009	0	-	-0,002
	x = 4	0	0	-0,009	0	-	0

### 10.2.3. Estructuras traslacionales. Método de las acciones 100

El cálculo de las líneas de influencia en estructuras traslacionales, análogamente a las intraslacionales, puede efectuarse como superposición de los dos estados inicial y modal. Al contrario que en el caso de las estructuras de nudos no desplazables, todas las reacciones desequilibradas en los nudos (procedentes de los esfuerzos de empotramiento rígido de todas las barras cargadas y las cargas directamente aplicadas en los nudos) son susceptibles de producir esfuerzos de flexión. En efecto, no sólo los momentos en los nudos, sino las fuerzas -vertical y horizontal- pueden producir movimientos en los nudos y por lo tanto una flexión de la estructura.

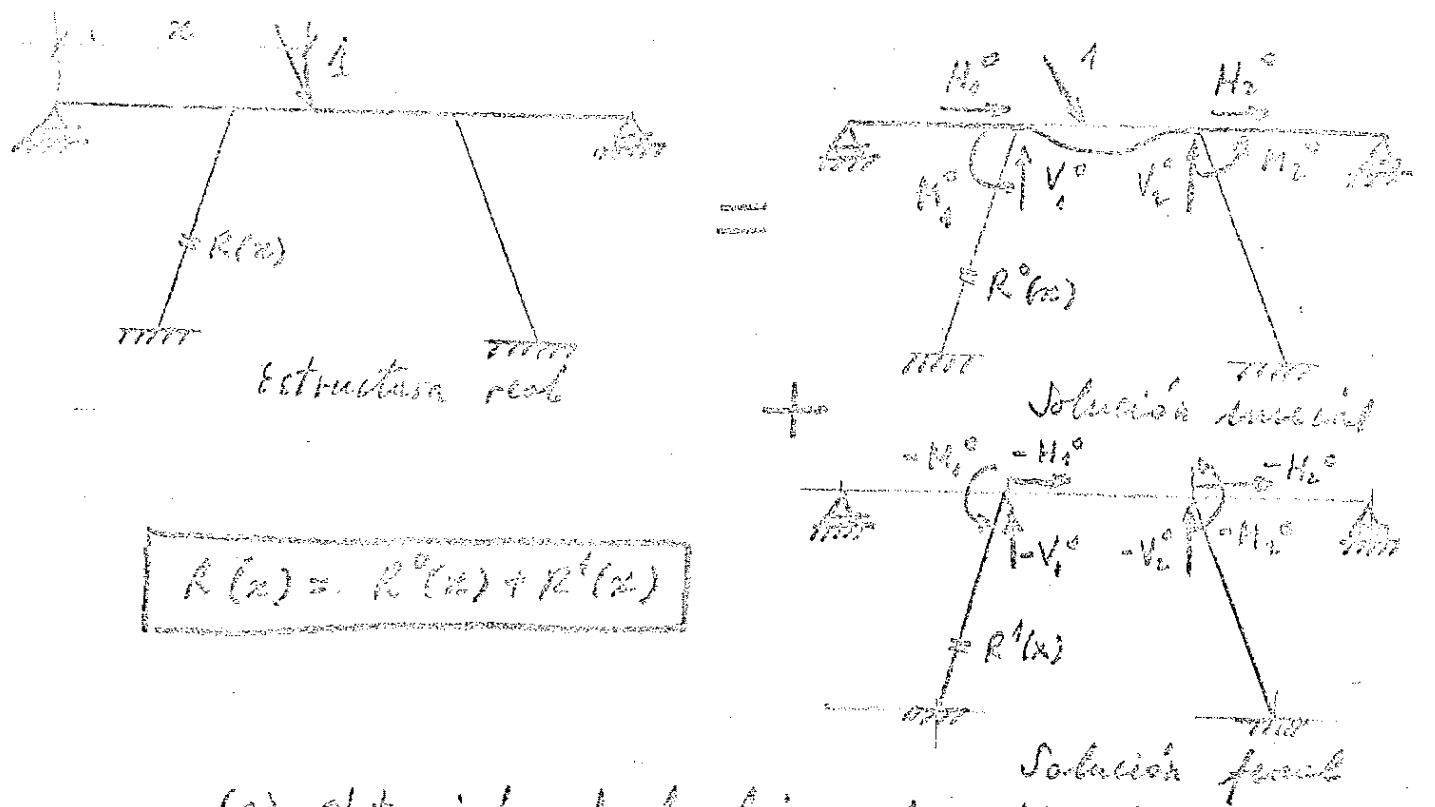
A modo de ejemplo ilustrativo, la figura 10.8 muestra una estructura traslacional genérica, en la que se intenta obtener la línea de influencia de un resultado  $R(x)$  bajo una acción móvil, que puede corresponder a una carga aislada inclinada. En este caso las reacciones de empotramiento rígido -dos fuerzas  $H$  y  $V$ , y un momento  $M$ , en cada extremo- producen cada una de ellas flexiones en la estructura y, por lo tanto, influyen en el resultado  $R(x)$ .

El procedimiento de cálculo es por lo tanto análogo al caso intraslacional, pero ahora el número de estados básicos se incrementa de un modo considerable. En la estructura de la figura 10.8, se piensa llevar a cabo seis cálculos traslacionales de Cross, que en el caso de simetría podrían reducirse a la mitad. Conviene, sin embargo, observar que en los estados básicos correspondientes, a fuerzas unitarias aplicadas en los nudos, su cálculo intraslacional de Cross no es necesario realizarlo, ya que no producen flexiones.

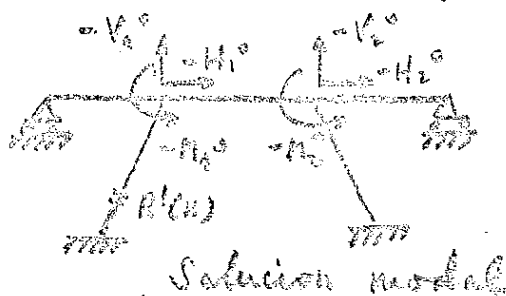
Los valores de las reacciones de empotramiento rígido para el caso de una viga de sección constante son:

$$\begin{aligned}
 M_1^0 &= P_1 L \left( \frac{x}{L} \right) \left( 1 - \frac{x}{L} \right)^2 \\
 M_2^0 &= -P_1 L \left( \frac{x}{L} \right)^2 \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \\
 Q_1^0 &= P_1 \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \left\{ 1 + \frac{x}{L} \left( 1 - \frac{2x}{L} \right) \right\} \\
 Q_2^0 &= P_1 \frac{x}{L} \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \left( 1 - \frac{2x}{L} \right) \right\} \\
 H_1^0 &= -P_2 \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \\
 H_2^0 &= -P_2 \frac{x}{L}
 \end{aligned} \tag{10.6}$$

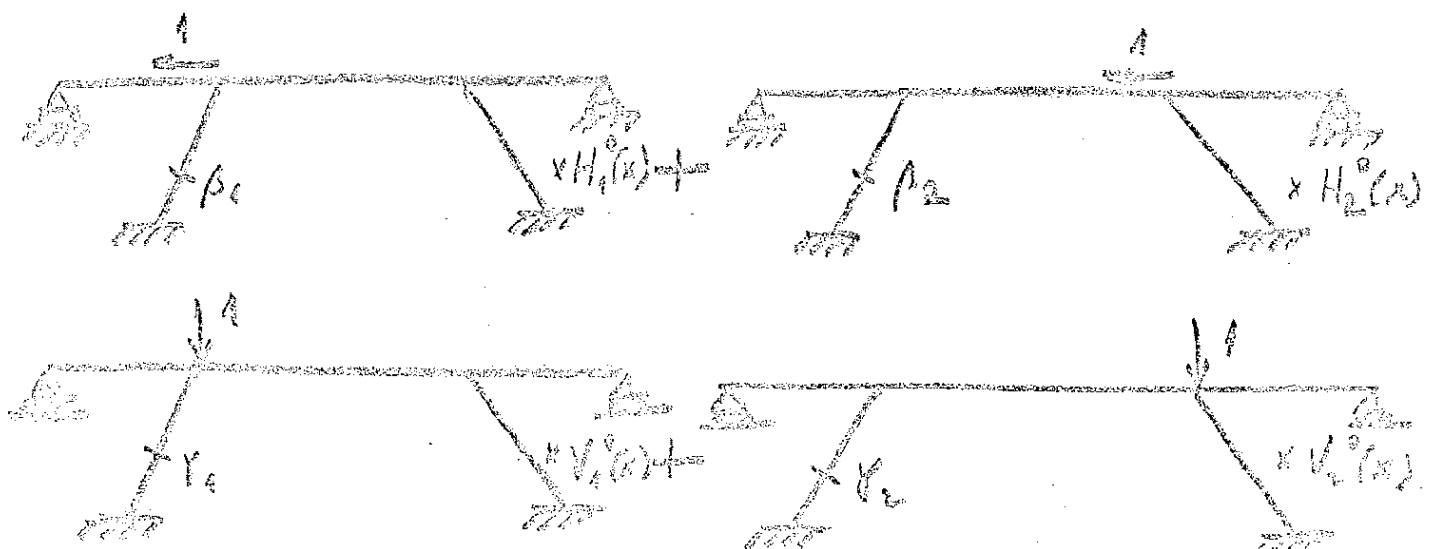
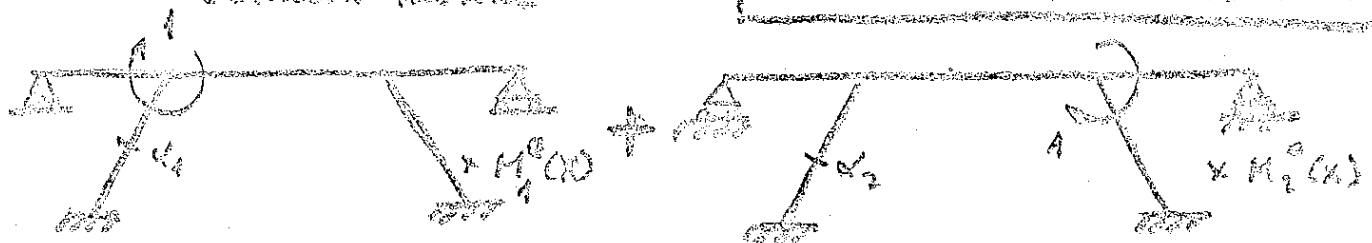
siendo  $P_1$  y  $P_2$  las componentes vertical (hacia abajo) y horizontal (del



(a) obtención de la línea de influencia.



$$R^1(x) = \alpha_1 H_1^0(x) + \alpha_2 H_2^0(x) + \beta_1 V_1^0(x) + \beta_2 V_2^0(x)$$



(b) Superposición de estados.

Figura 10.8. Métodos de las acciones unitarias o 100.

extremo 1 al 2) de la carga actuando a una distancia  $x$  del extremo izquierdo, 1, de la viga.

En el caso de una viga de sección variable, se consideran los procedimientos explicados en el capítulo 7.

Se puede trabajar con acciones 100, con objeto de considerar únicamente valores enteros de los resultados, de ahí la denominación de acciones 100 por la que a veces se conoce este procedimiento de obtención de líneas de influencia. El procedimiento y disposición de cálculo se expone en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.2. En la estructura indicada en la figura 10.9, hallar la línea de influencia del momento flector en la sección A, cuando una carga vertical descendente recorre el dintel superior. Se darán los valores de la línea de influencia en puntos situados a cuartos de la luz de cada vano del dintel.

Las características de las barras son:

Barras 1-3; 3-4 y 4-6: sección rectangular de 10 m de ancho y 1 m de canto.

Barras 2-3 y 4-5: están constituidas, cada una, por cuatro barras cilíndricas de 1,00 m de diámetro.

Con objeto de efectuar los cálculos de Cross traslacionales de los estados previos, se deducen los momentos intraslacionales del estado básico  $E_0$ , correspondiente a la acción de un momento 100 (figura 10.10a), como suma de dos estados: simétrico y antisimétrico. El estado paramétrico  $E_1$  de la estructura se superpone al anterior, de modo que se produzca el equilibrio de esfuerzos cortantes, obteniéndose la solución final (traslacional)  $E_1^*$  mediante la composición

$$E_1^* = E_0 + 0,197 E_1$$

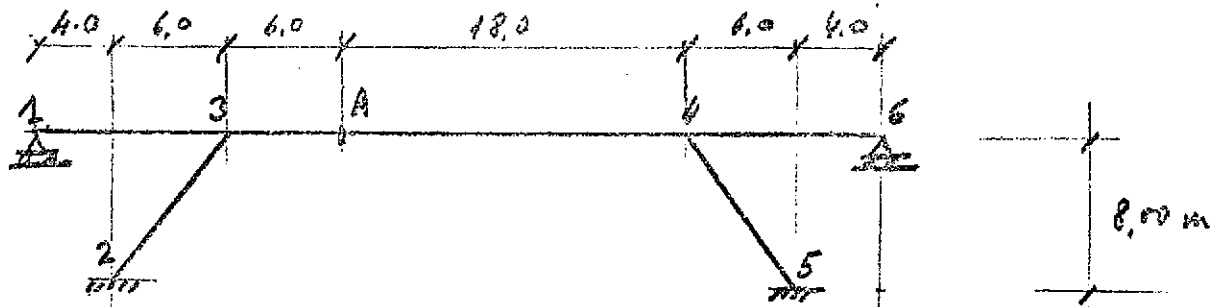
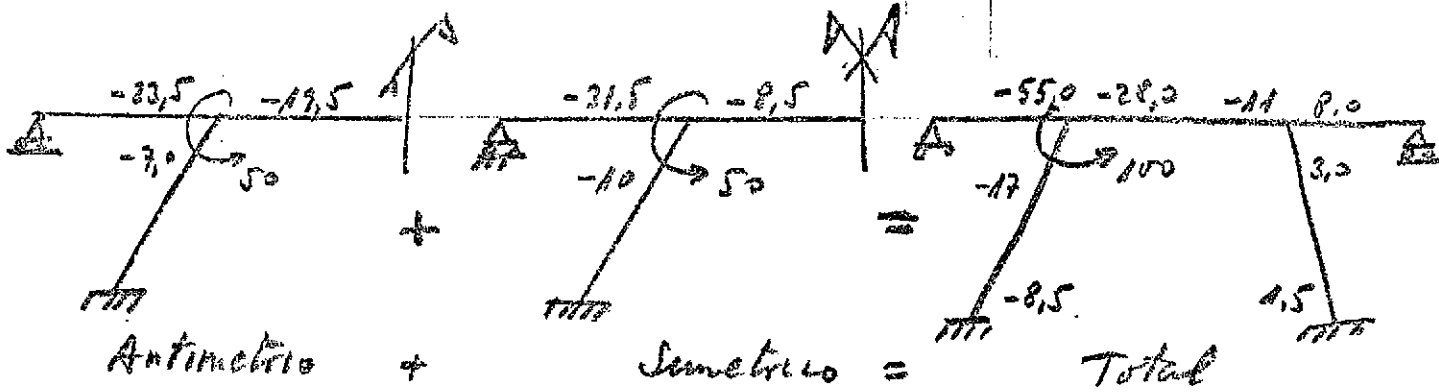
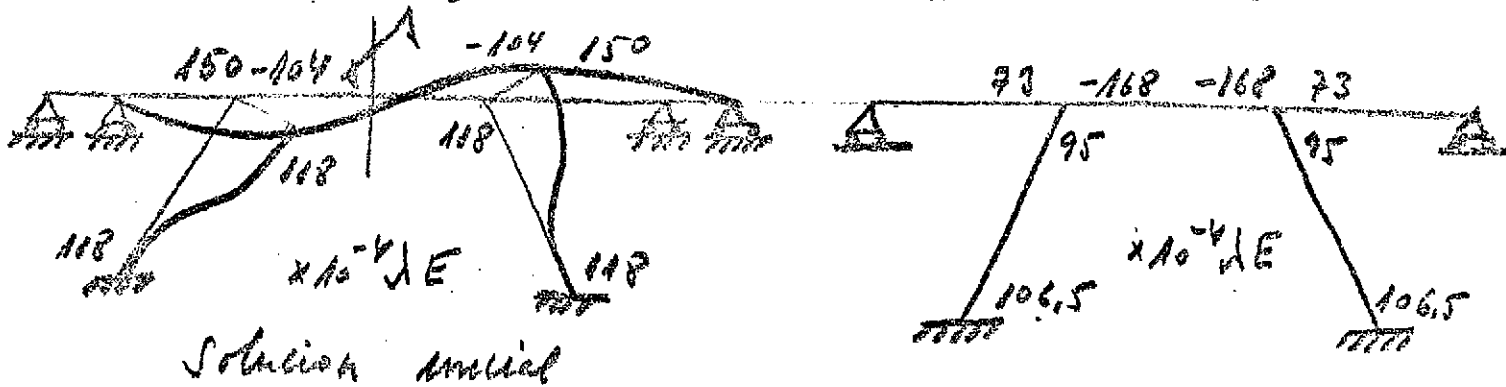


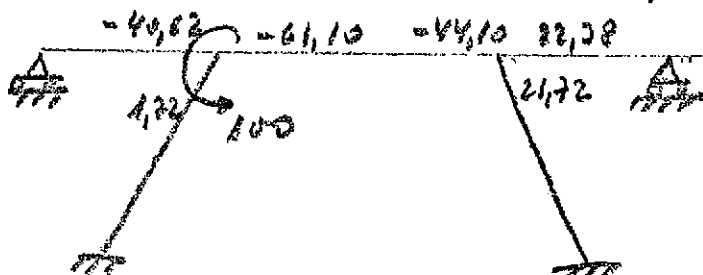
Figura 10.9. Ejemplo 10.2.



(a) Estado  $E_0$ . Momento 100. Translacional.

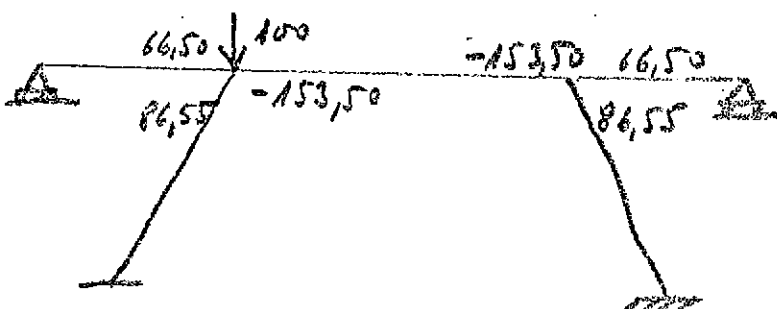


(b) Estado  $E_1$ . Estado paramétrico.



$$E_1^* = E_0 + 0.197 E_1$$

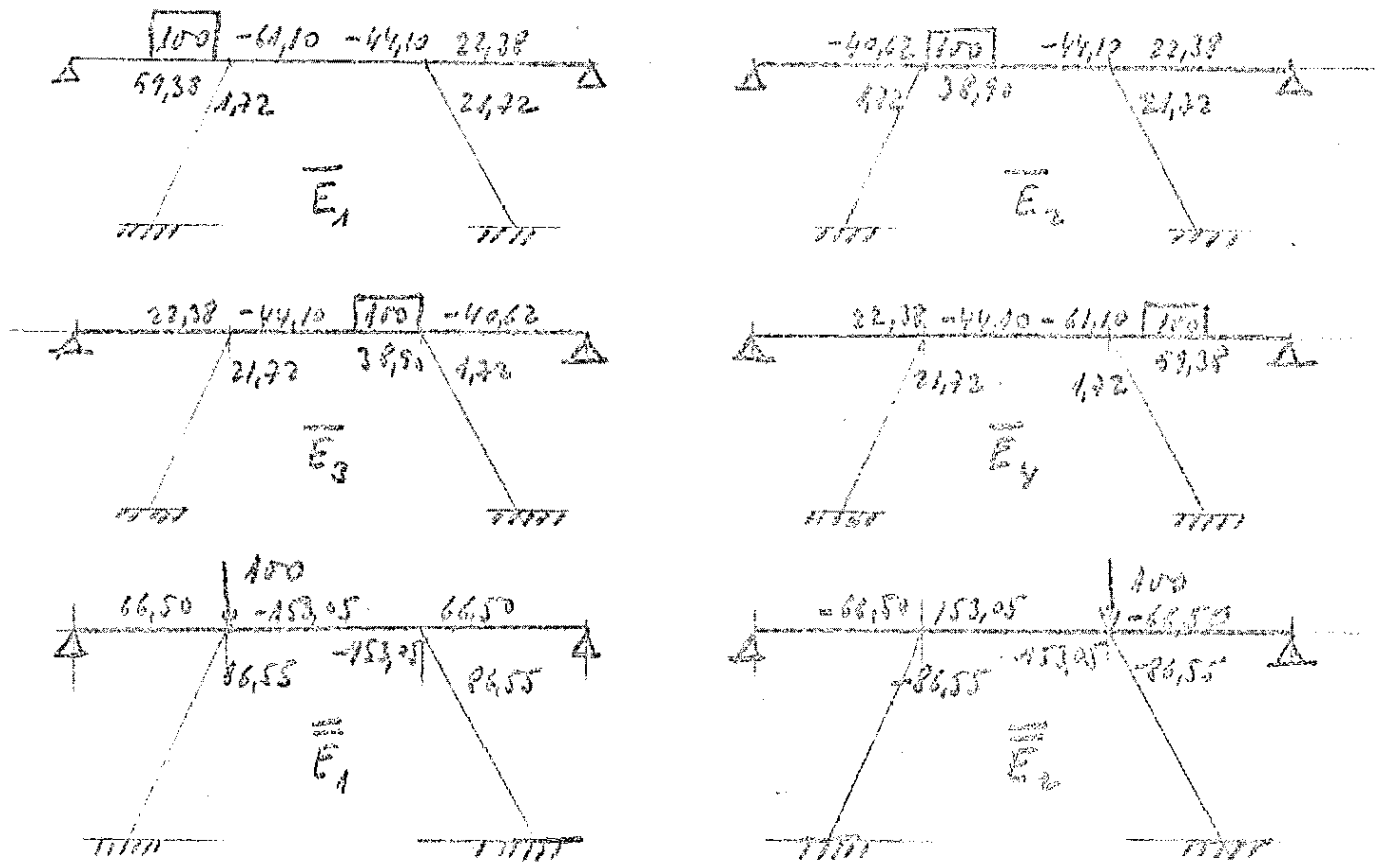
(c) Estado básico  $E_1^*$ . Momento 100. Translacional.



$$E_2^* = 0.911 E_1$$

(d) Estado básico  $E_2^*$ . Carga vertical 100. Translacional

Figura 10.10. Ejemplo 10.2. (cont.).



(e) Estados básicos

Figura 10.10. Ejemplo 10.2.

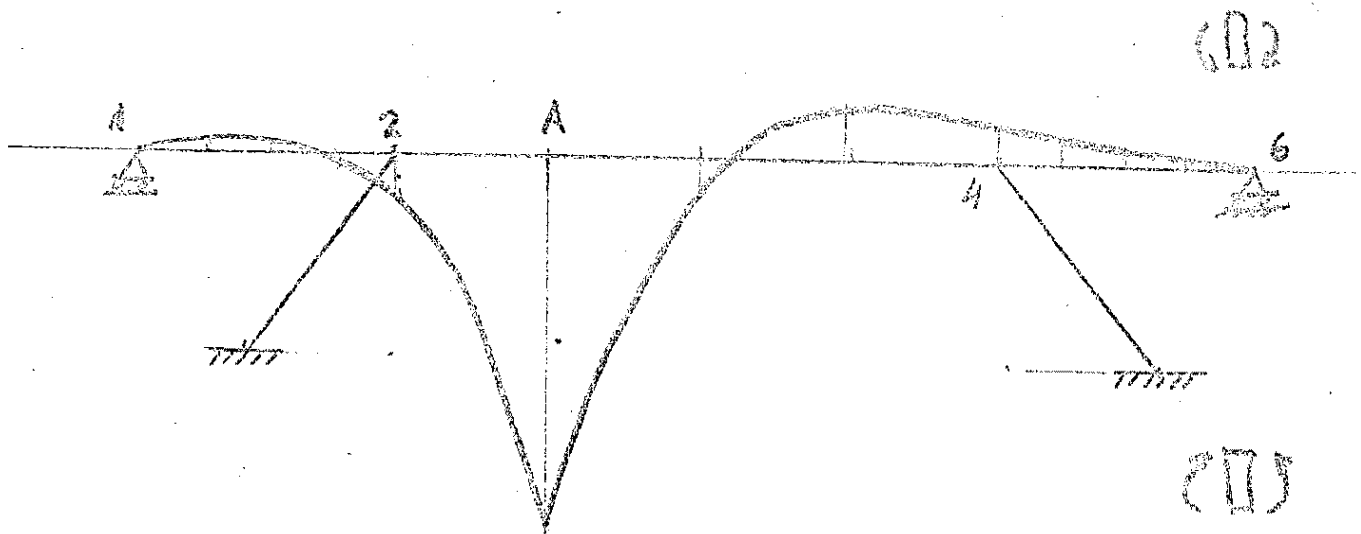


Figura 10.11. Línea de influencia de  $\mu_A$ .

Análogamente se procede con el estado básico correspondiente a una fuerza vertical, que ahora no produce momentos intraslacionales. El equilibrio de cortantes con la fuerza vertical conduce al resultado:

$$E_2^* = 0,191 E_1$$

Una vez deducidos los resultados de los dos estados básicos con acciones sobre nudos (figuras 10.10a y 10.10d), puede ser conveniente -al menos desde un punto de vista de claridad en la exposición- obtener los momentos en los extremos de barras en los estados  $\bar{E}_i$ , es decir, bajo la actuación de un momento de empotramiento rígido 100 (figura 10.10c), así como en los estados  $\bar{E}_i$  referentes a la acción fuerza vertical 100. Los resultados de estos estados se deducen sencillamente, como ya se ha indicado en 10.2.2, a partir de los  $E_1^*$  y  $E_2^*$ .

El momento flector pedido es:

$$\mu_A = -\frac{3}{4} M_{34} + \frac{1}{4} M_{43} + \mu_{A_{isost.}}$$

es decir

$$\mu_A = \bar{\beta}_{2i-1} M_1^0 + \bar{\beta}_{2i} M_2^0 + \bar{\beta}_{i-1} Q_1^0 + \bar{\beta}_i Q_2^0 + \mu_{A_{isost.}}$$

con  $M_1^0$ ,  $M_2^0$ ,  $Q_1^0$  y  $Q_2^0$  las reacciones -momentos y fuerzas verticales- de empotramiento rígido producidos por una carga unidad situada en el vano  $i$  que son función de la abscisa de su punto de aplicación. El coeficiente  $\bar{\beta}_i$  ( $i=0,1,2,\dots,5$ ) corresponde al estado  $\bar{E}_i$  de la figura 10.10d, y su valor es:

$$\bar{\beta}_i = -\frac{3}{4} \bar{M}_{34}^i + \frac{1}{4} \bar{M}_{43}^i \quad (i=1,\dots,4)$$

considerando  $\bar{\beta}_0 = \bar{\beta}_6 = 0$ .

Los momentos  $\bar{M}_{34}$  y  $\bar{M}_{43}$  son los resultados (divididos por 100) del estado  $E_i$ .

Análogamente, los coeficientes  $\bar{\beta}_i$  ( $i=1,2,\dots,6$ ) son:

$$\bar{\beta}_i = -\frac{3}{4} \bar{M}_{34}^i + \frac{1}{4} \bar{M}_{43}^i \quad (i=1, \dots, 4)$$

y 
$$\bar{\beta}_0 = \bar{\beta}_6 = 0$$

siendo 
$$\bar{M}_{34}^{2i-1} = \bar{M}_{34}^{2i}$$

los momentos en los extremos 3 y 4 de la barra 3-4 (divididos por 100) en el estado  $\bar{E}_i$ .

Los momentos isostáticos  $\mu_{A_{isost.}}$  aparecen cuando la carga puntual actúa en el vano 3-4; en este caso, se obtiene:

$$\mu_{A_{isost.}} = 0,75 x \quad x \leq 6.00 \text{ m.}$$

$$\mu_{A_{isost.}} = 6 - 0,25 x \quad x \geq 6.00 \text{ m.}$$

siendo  $x$  la distancia del punto de aplicación de la carga al nudo 4.

Tras estas consideraciones se puede escribir la siguiente tabla operativa.



TABLA 10.6. Línea de influencia de  $\mu_A$ .

APLICACION DE LA CARGA		REACCIONES DE EMPOTRAMIENTO RIGIDO				COEFICIENTES DEL VANO i				$\mu_{A \text{ isos.}}$	$\mu_A$
VANO	SECCION	$M_1^0$	$M_2^0$	$Q_1^0$	$Q_2^0$	$\bar{B}_{2i-1}$	$\bar{B}_{2i}$	$\bar{B}_{2i-1}$	$\bar{B}_{2i}$		
i = 1	x = 0	0	0	1,000	0,000	0	0,348	0	0,765	-	0
	x = 2,5	0	-1,172	0,633	0,367	0	0,348	0	0,765	-	-0,13
	x = 5,0	0	-1,875	0,312	0,688	0	0,348	0	0,765	-	-0,12
	x = 7,5	0	-1,641	0,086	0,914	0	0,348	0	0,765	-	0,13
	x = 10	0	0	0,000	1,000	0	0,348	0	0,765	-	0,77
i = 2	x = 0	0	0	1,000	0,000	-0,402	0,428	0,765	-0,765	0	0,77
	x = 6	3,375	1,125	0,693	0,307	-0,402	0,428	0,765	-0,765	4,5	7,19
	x = 12	3,000	3,000	0,500	0,500	-0,402	0,428	0,765	-0,765	3,0	0,51
	x = 18	1,125	3,375	0,307	0,693	-0,402	0,428	0,765	-0,765	1,5	-0,92
	x = 24	0	0	0,000	1,000	-0,402	0,428	0,765	-0,765	0	-0,77
i = 3	x = 0	0	0	1,000	0,000	0,178	0	-0,765	0	-	-0,77
	x = 6	1,641	0	0,914	0,086	0,178	0	-0,765	0	-	-0,41
	x = 12	1,875	0	0,688	0,312	0,178	0	-0,765	0	-	-0,20
	x = 18	1,172	0	0,367	0,633	0,178	0	-0,765	0	-	-0,07
	x = 24	0	0	0,000	1,000	0,178	0	-0,765	0	-	0

Las reacciones de empotramiento rígido son, para cada vano:

Vano 1-3 (i=1):

$$M_2^0 = -\frac{Y}{2} \left\{ 2 - \frac{Y}{10} \left( 3 - \frac{Y}{10} \right) \right\}$$

$$Q_2^0 = 1 - \frac{Y^2}{2 \cdot 10^2} \left( 3 - \frac{Y}{10} \right)$$

con  $y = 10-x$ .

Vano 3-4 (i=2):

$$M_1^0 = x \left( 1 - \frac{x}{24} \right)^2$$

$$M_2^0 = -\frac{x^2}{24}\left(1 - \frac{x}{24}\right)$$

$$Q_1^0 = 1 - \frac{x^2}{24^2}\left(3 - 2 \frac{x}{24}\right)$$

$$Q_2^0 = \frac{x^2}{24}\left(3 - 2 \frac{x}{24}\right)$$

Vano 4-6 (i=3):

$$M_1^0 = \frac{x}{2}\left\{2 - \frac{x}{10}\left(3 - \frac{x}{10}\right)\right\}$$

$$Q_1^0 = 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 10^2}\left(3 - \frac{x}{10}\right)$$

Los vanos extremos se han supuesto empotrado-apoyados.

La línea de influencia resultante se representa en la figura 10.11.

### 10.3. APLICACION DEL TEOREMA DE LA RECIPROCIDAD O DE MAXWELL

#### 10.3.1. Consideraciones generales

El teorema de la reciprocidad constituye una consecuencia de los principios energéticos y ha sido expuesto previamente en el contexto de las estructuras articuladas. La extensión a las estructuras en tramados es inmediata, como se muestra a continuación.

Se considera una estructura sometida a un estado de cargas ( $E_1$ ), definido por unas acciones estáticas (fuerzas y momentos exteriores, así como esfuerzos internos), y cinemáticas (movimientos impuestos y deformaciones iniciales) y todas ellas se designan mediante un superíndice 1. Análogamente se define otro estado general de cargas,  $E_2$ , y se representan sus acciones por el superíndice 2.

El teorema de reciprocidad establece que  $V_1^2 = V_2^1$

siendo

$$V_1^2 = U_1^2 - W_1^2 \quad \text{y} \quad V_2^1 = U_2^1 - W_2^1$$

energías potenciales totales (suma de la energía de deformación y la potencial de la estructura). En particular  $V_1^j$  corresponde a la energía potencial total que se produce en la estructura debido a las acciones estáticas del Estado  $E_j$  cuando aparecen unos movimientos y deformaciones causadas por las acciones del estado  $E_i$ . Si solo se consideran fuerzas exteriores, la expresión del teorema de Maxwell se reduce a la siguiente:

$$W_1^2 = W_2^1$$

es decir, el trabajo producido por las fuerzas  $F^1$  del estado 1 por los movimientos debidos a las fuerzas  $F^2$  del estado 2 es igual al trabajo de las fuerzas  $F^2$  los movimientos originados por las fuerzas  $F^1$ .

La aplicación del teorema es válida para cualquier tipo de estructuras, en particular para las reticuladas, traslacionales o no, y permite la determinación sencilla de las líneas de influencia.

Por conveniencia de exposición, se distinguen dos clases de líneas de influencia: (a) Líneas de influencia de movimientos (y deformaciones) y (b) Líneas de influencia de fuerzas (y esfuerzos). Para cada una de ellas se comenta su cálculo, que en esencia es idéntico.

#### 10.3.2. Líneas de influencia de movimientos y deformaciones

La línea de influencia de un movimiento (flecha o giro), - cuando una acción móvil -generalmente de valor unidad- correspondiente a una fuerza, momento o esfuerzo recorre una zona de la estructura, coincide con una deformada de la estructura. Esta deformada corresponde a la ley de movimientos eficaces con la acción móvil -flecha, giro o deformación, según el caso- producida por una carga (fuerza o momento) eficaz

con el movimiento cuya línea de influencia se intenta determinar.

La deducción de esta identidad entre línea de influencia y deformada se basa en la aplicación del teorema de reciprocidad a la estructura, considerando los dos estados de carga siguientes: El estado 1 corresponde a la fuerza unidad ( $P^1 = 1$ ) eficaz con el movimiento  $v(x)$  cuya línea de influencia se desea obtener. El estado 2 es el de la acción móvil unidad ( $P_x^2 = 1$ ) aplicada en una sección genérica  $x$  (definida por la distancia  $x$ ). Si se denomina  $v_x^1$  al movimiento eficaz con  $P_x^2$  que se produce en el estado 1, y  $v^2 = v(x)$  es el movimiento cuya línea de influencia se desea (producido en el estado 2), se obtiene, al aplicar el teorema de Maxwell (figura 10.12a.),

$$(P^1 = 1)v^2 = (P_x^2 = 1)v_x^1 \quad (10.7)$$

es decir

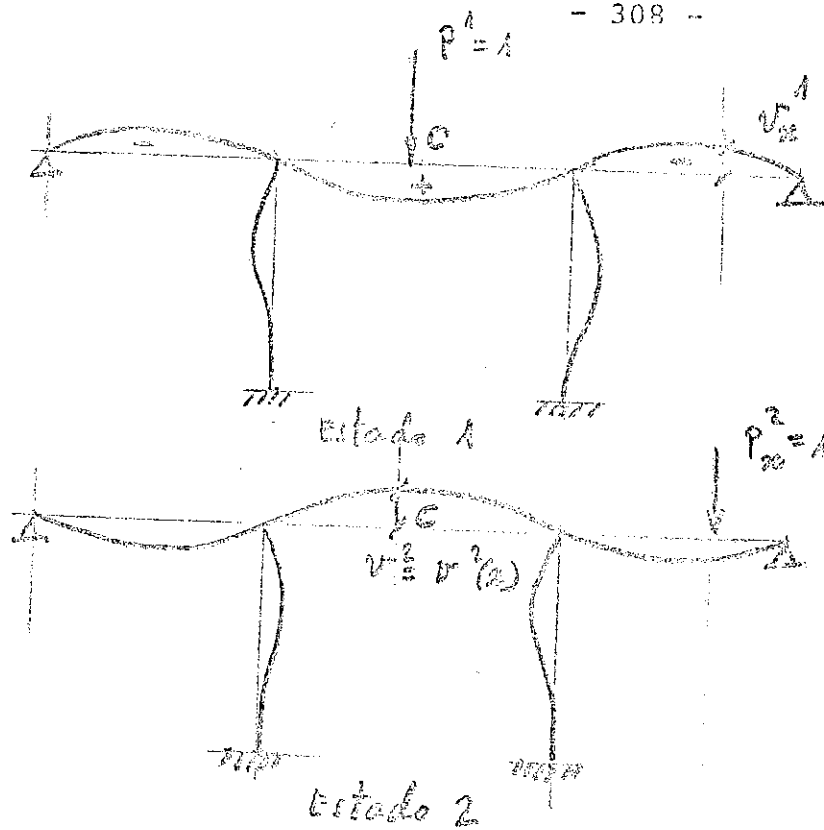
$$v^2 = v_x^1 = v(x) \quad (10.8)$$

que confirma el enunciado anterior.

Conviene tener presente el criterio de signos que se sigue, puesto que  $v_x^1$  es positivo, de acuerdo con la dirección de la carga móvil  $P_x^2$ , y  $P^1 = 1$  debe de ser eficaz (trabajo positivo) con el movimiento cuya línea de influencia se solicita. La figura 10.12b ilustra estas ideas. La extensión a las líneas de influencia de deformaciones es directa.

### 10.3.3. Líneas de influencia de esfuerzos y reacciones. Estructura liberada

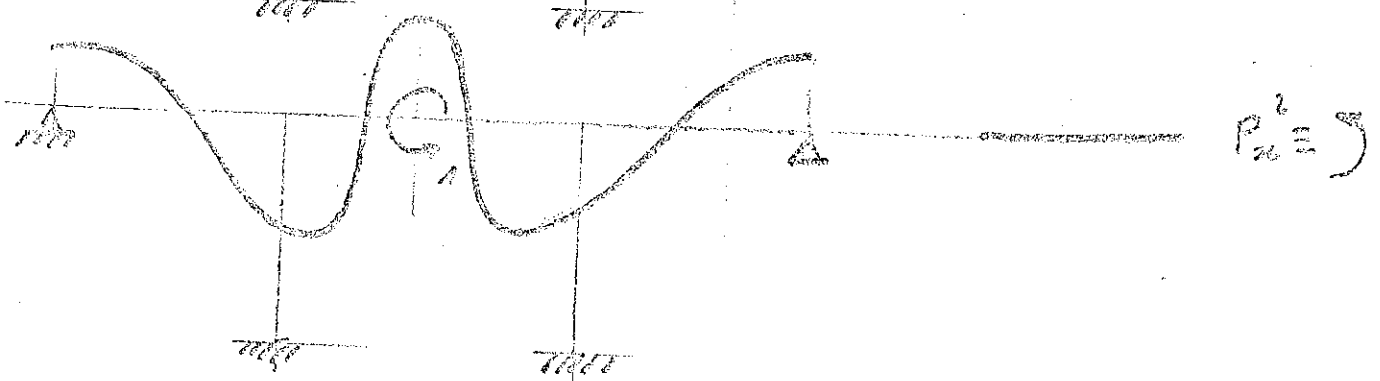
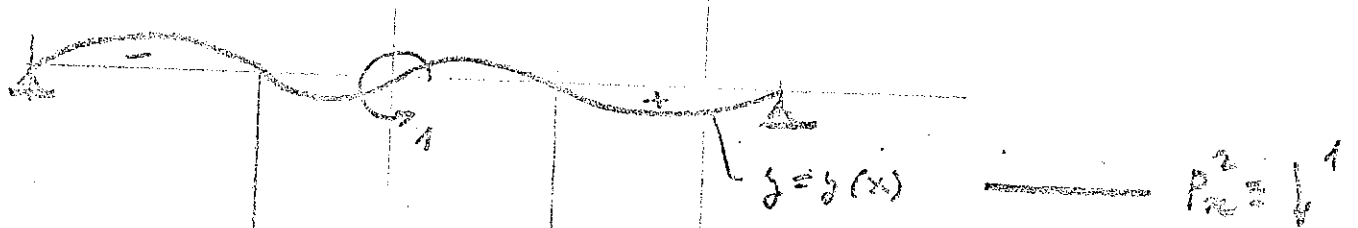
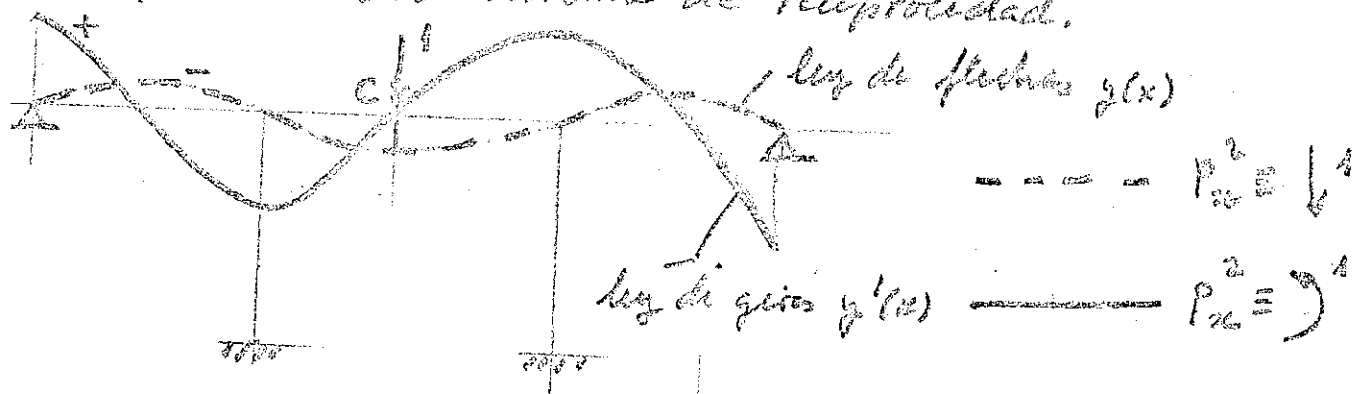
Este procedimiento de cálculo de líneas de influencia ha sido comentado anteriormente en el estudio de estructuras articuladas. En esencia consiste en liberar la estructura de la coacción que bien - el esfuerzo, bien la reacción, cuyas líneas de influencias se buscan, imponen en la misma. Por ejemplo, si se trata de un momento flector se



Línea de influencia de la flecha vertical en C cuando una carga vertical descendente unidad recorre el dintel.

Convenio de signos:  
Flecha  $v_z > 0$  si va hacia abajo.

(a) Aplicación del teorema de reciprocidad.



(b) Líneas de influencia de la flecha y el giro en C.  
Figura 10.12. Ejemplos de aplicación del problema de reciprocidad.

introduce una rótula en la sección correspondiente. En el caso de una fuerza reacción, se suprime la coacción correspondiente. Por lo tanto, el grado de hiperestatismo de la estructura queda disminuido en una unidad. (\*) En esta estructura se consideran dos estados de carga para los que se aplica el teorema de reciprocidad. El primero,  $E_1$ , corresponde a la actuación de una biacción o influjo ( $P^1 = 1$ ) unidad, eficaz con la liberalización efectuada. Por ejemplo, si se introdujo una rótula en una sección, se aplican sendos momentos en cada una de las dos caras de la rótula; uno de ellos aplicado sobre la parte dorsal de la estructura, y con el signo coincidente con la componente frontal del momento flector considerado positivo en la sección, y el otro actuando sobre la parte frontal de la estructura y con el signo contrario al anterior, es decir, coincidente con la componente dorsal del momento flector positivo en la sección. La figura 10.13 ilustra varias posibilidades. El segundo estado de cargas,  $E_2$ , considera la actuación de la acción móvil ( $P_x^2 = 1$ ) en una sección genérica definida por una distancia  $x$ , y la biacción  $J^2 = J(x)$ , que restaura la continuidad en la estructura liberada y que, por lo tanto, es igual en valor absoluto al esfuerzo o reacción cuya línea de influencia se busca. La aplicación del teorema de Maxwell conduce a la igualdad (figura 10.14):

$$(P^1 = 1)(v^2 = 0) = (P_x^2 = 1)v_x^1 + J^2 \cdot v^1 \quad (10.9)$$

NOTA(\*): Este hecho carece aquí, en general, de importancia, en el contexto del cálculo mediante el método de Cross, que constituye un procedimiento de equilibrio y no de hiperestáticas. Sin embargo, puede ser necesaria su consideración si la estructura reticulada, cuya línea de influencia se estudia, es isostática, ya que entonces la liberalización la convierte en un mecanismo y el teorema de Maxwell no podría ser aplicado. En su lugar se debería proceder mediante el principio de los trabajos virtuales. Ver a este respecto el apartado de líneas de influencia de estructuras articuladas.

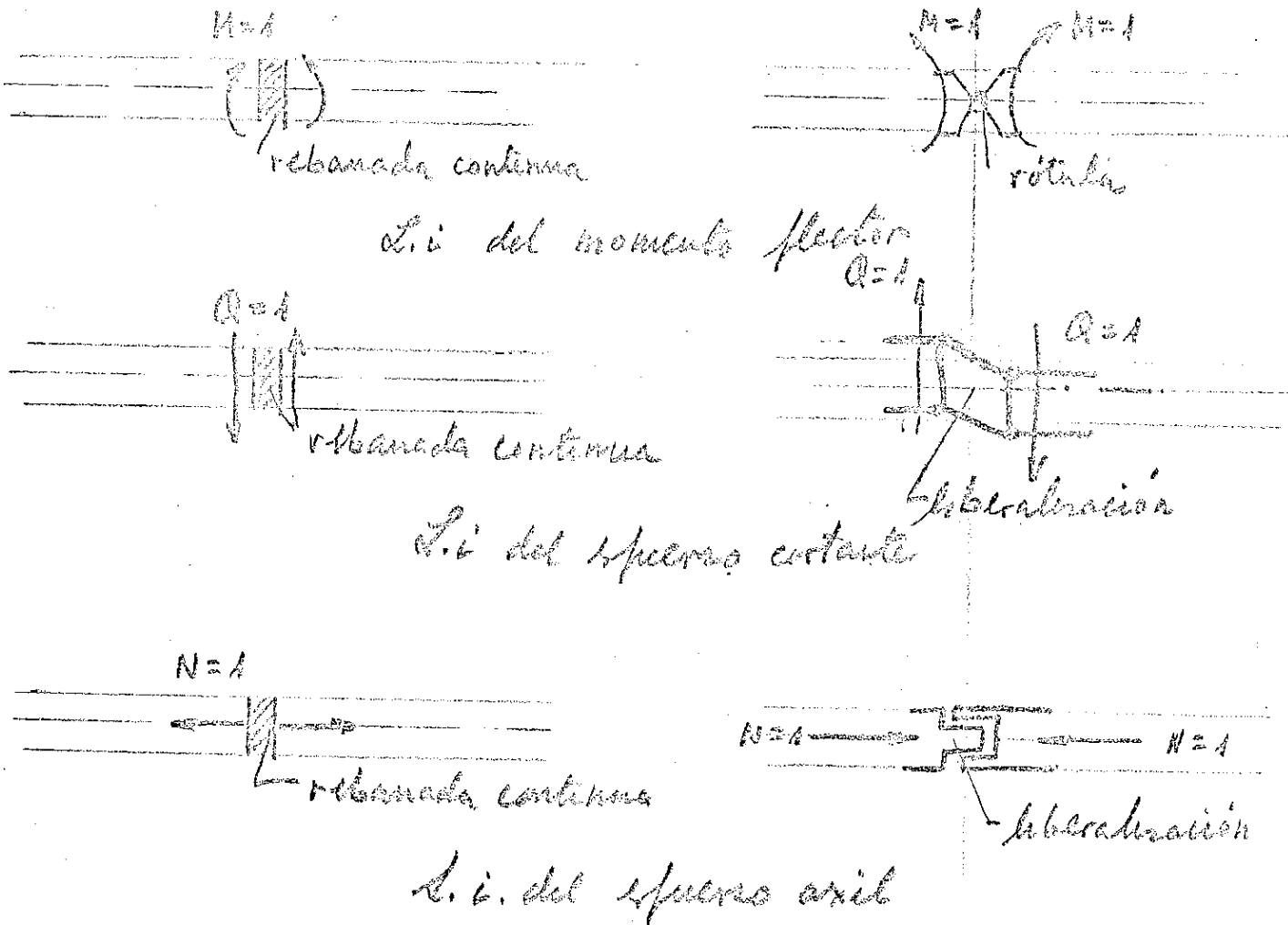


Figura 10.13. Liberalizaciones.

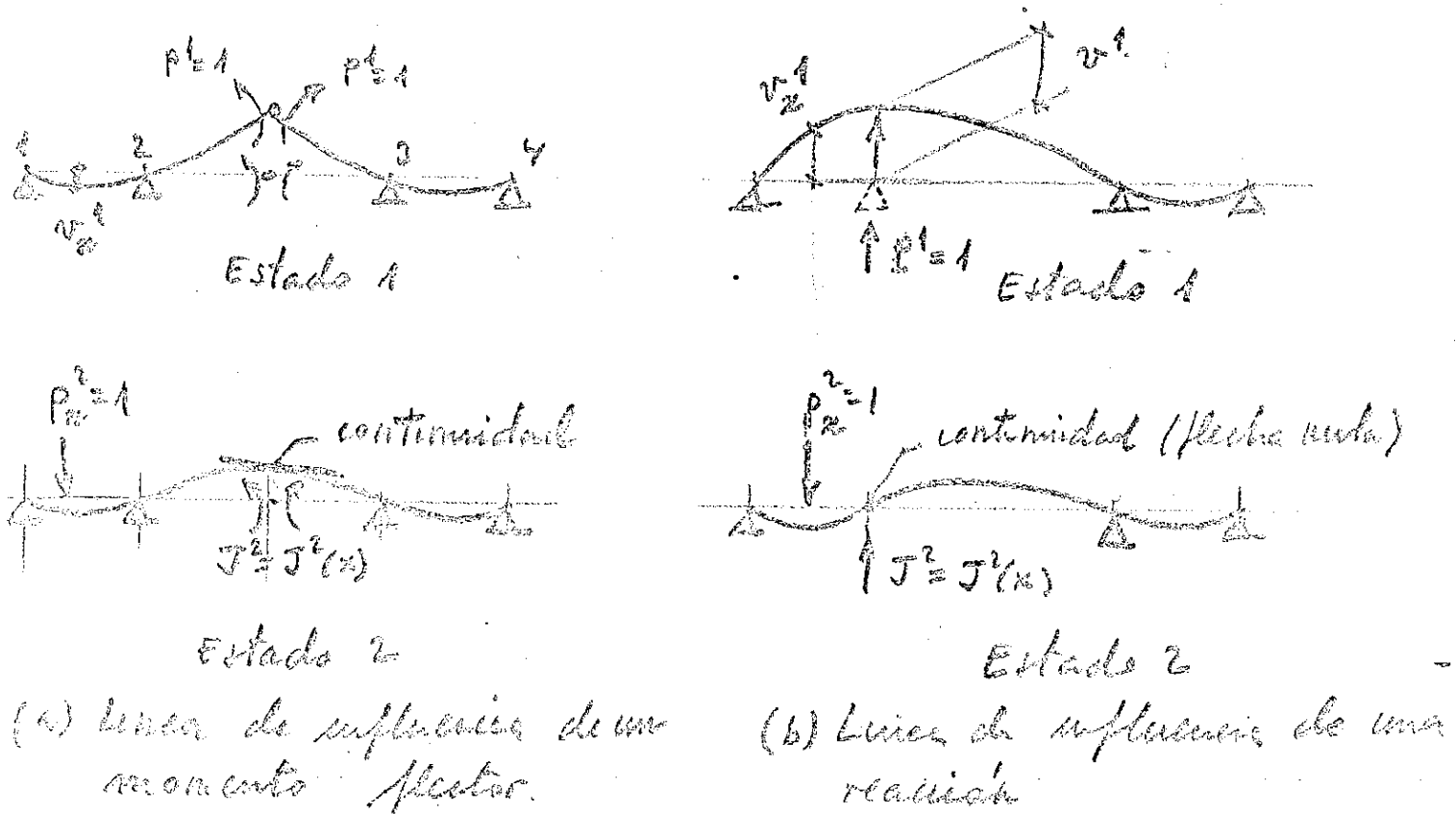


Figura 10.14. Aplicación del teorema de reciprocidad. Estructura libre  
rada. Viga de tres vanos.

es decir

$$J^2 = - \frac{v^1_x}{v^1_1} = J(x) \quad (10.10)$$

Se deduce, por lo tanto, de la expresión (10.10), que la línea de influencia de un esfuerzo o reacción es proporcional a la deformada, según la dirección eficaz de la acción móvil, producida por una biacción unidad correspondiente al esfuerzo o reacción, considerados y actuando sobre la estructura liberada. El factor de proporcionalidad es igual al movimiento producido en la liberalización por la biacción unidad, es decir, eficaz con ésta.

Ejemplo 10.3. Determinar en una viga continua de tres vanos iguales, de longitud  $L$  y sección de características resistentes constantes  $EI$ , las siguientes líneas de influencia, cuando actúa una carga puntual descendente de valor unidad:

a) Reacción en un apoyo intermedio.

b) Momento flector en la sección centro de luz del vano central.

Idénticas cuestiones cuando la carga móvil es un momento - unidad positivo (sentido antihorario). Los resultados se darán a décimos de luz de cada vano.

(a) Considerando la figura 10.14, se observa que es preciso obtener la elástica de una viga continua de dos vanos, de luces  $2L$  y  $L$ , sometida a una carga puntual unidad en la sección central del vano de luz  $2L$ .

El cálculo de Cross se esquematiza en la tabla 10.7.



TABLA 10.7 Cálculo de Cross.

NUDO	3	
PARRA	3-1	3-4
R	$\frac{3EI}{2L}$	$\frac{3EI}{L}$
k	0,333	0,667
$M^0$	$-\frac{3}{8}L$	-
$M^1$	$\frac{L}{8}$	$\frac{L}{4}$
M	$-\frac{L}{4}$	$\frac{L}{4}$

La deformada de la estructura se deduce de acuerdo con las siguientes expresiones (signo positivo; flechas hacia abajo):

$$\text{Vano 1-3: } v_x^1 = v_{x0}^1 + v_{x1}^1 \quad (0 \leq x \leq L)$$

con

$$v_{x0}^1 = \frac{x}{12EI} (3L^2 - x^2)$$

$$v_{x1}^1 = \frac{x}{48EI} (4L^2 - x^2)$$

$$v_x^1 = v_{x0}^1 + v_{x1}^1 \quad (L \leq x \leq 2L)$$

con

$$v_{x0}^1 = \frac{(2L-x)}{12EI} \{3L^2 - (2L-x)^2\}$$

$$v_{x0}^1 = -\frac{x}{48EI} (4L^2 - x^2)$$

$$\text{Vano 3-4: } v_x^1 = v_{x0}^1 + v_{x1}^1 \quad (0 \leq x \leq L)$$

con  $v_{x0}^1 = 0$

$$v_{x1}^1 = \frac{x}{24EI} (2L^2 - 3Lx + x^2)$$

Se comprueba que el valor de la flecha en se deduce sustituyendo  $x = L$  en la expresión de  $v_x^1$  del vano 1-3.

$$v^1 = \frac{L^3}{6EI} - \frac{L^3}{16EI} = \frac{5L^3}{48EI}$$

Por lo tanto, la línea de influencia de la reacción es:

$$J^2 = J(x) = -\frac{48}{5} \frac{EI}{L^3} v_x^1$$

Los valores numéricos que resultan se resumen en la tabla 10.8 y se representan en la figura 10.15a. El signo positivo de la reacción corresponde a fuerza vertical hacia arriba (el apoyo tiende a hundirse en el terreno).

TABLA 10.8. Línea de influencia de la reacción ( $J = R$ ).

SECCION VANO	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1 $\frac{EI}{L^3} v_{x0}^1$	0,000	-0,025	-0,049	-0,073	-0,095	-0,115	-0,132	-0,146	-0,157	-0,164	-0,167
1 $\frac{EI}{L^3} v_{x1}^1$	0,000	0,008	0,017	0,024	0,032	0,039	0,046	0,051	0,056	0,060	0,063
J	0,000	0,162	0,310	0,468	0,602	0,726	0,826	0,916	0,973	1,000	1,000
2 $\frac{EI}{L^3} v_{x0}^1$	-0,167	-0,164	-0,157	-0,146	-0,132	-0,115	-0,095	-0,073	-0,049	-0,025	-0,000
2 $\frac{EI}{L^3} v_{x1}^1$	0,063	0,064	0,064	0,063	0,060	0,055	0,048	0,039	0,029	0,015	0,000
J	1,000	0,961	0,893	0,798	0,691	0,576	0,451	0,326	0,192	0,096	0,000
3 $\frac{EI}{L^3} v_{x0}^1$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3 $\frac{EI}{L^3} v_{x1}^1$	0,000	0,008	0,012	0,015	0,016	0,016	0,014	0,011	0,008	0,004	0,000
J	0,000	-0,077	-0,115	-0,144	-0,154	-0,154	-0,134	-0,106	-0,077	-0,038	0,000

De un modo semejante se procede con la línea de influencia del momento flector en la sección central del vano 2-3. Dada la simetría de la figura, sólo es preciso calcular una estructura isostática constituida por un vano simplemente apoyado (1-2), de luz  $L$ , y un voladizo de luz  $\frac{L}{2}$ , sometido a un momento unidad positivo.

La elástica de esta estructura es (signo positivo de flechas hacia abajo):

$$\text{Vano 1-2: } v_x^1 = \frac{x}{6EI} (L^2 - x^2) \quad 0 \leq x \leq L$$

$$\text{Vano 2-3: } v_x^1 = -\frac{x^2}{2EI} - \frac{L}{3EI} x \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

Y los valores simétricos en las secciones restantes.

El valor del giro en la sección central del vano 2-3 es:

$$v^1 = \left( \frac{L}{2EI} + \frac{L}{3EI} \right) 2 = \frac{5}{3} \frac{L}{EI}$$

La línea de influencia del momento flector es, por lo tanto

$$J^2 = J(x) = -\frac{3}{5} \frac{EI}{L} v_x^1$$

La tabla 10.9 muestra los valores de esta línea de influencia, que se representa en la figura 10.15b.

TABLA 10.9. Línea de influencia del momento flector ( $J = \frac{M}{L}$ ).

SECCION VANO		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1	$\frac{EI}{L} \frac{1}{2} v_x^1$	0,000	0,017	0,032	0,046	0,056	0,063	0,064	0,060	0,048	0,029	0,000
	J	0,000	-0,010	-0,019	-0,028	-0,034	-0,038	-0,038	-0,036	-0,029	-0,017	0,000
2	$\frac{EI}{L} \frac{1}{2} v_x^1$	0,000	-0,038	-0,087	-0,145	-0,213	-0,292	-0,213	-0,145	-0,087	-0,038	0,000
	J	0,000	0,023	0,052	0,087	0,128	0,175	0,128	0,087	0,052	0,023	0,000

El vano 3 es simétrico del vano 1

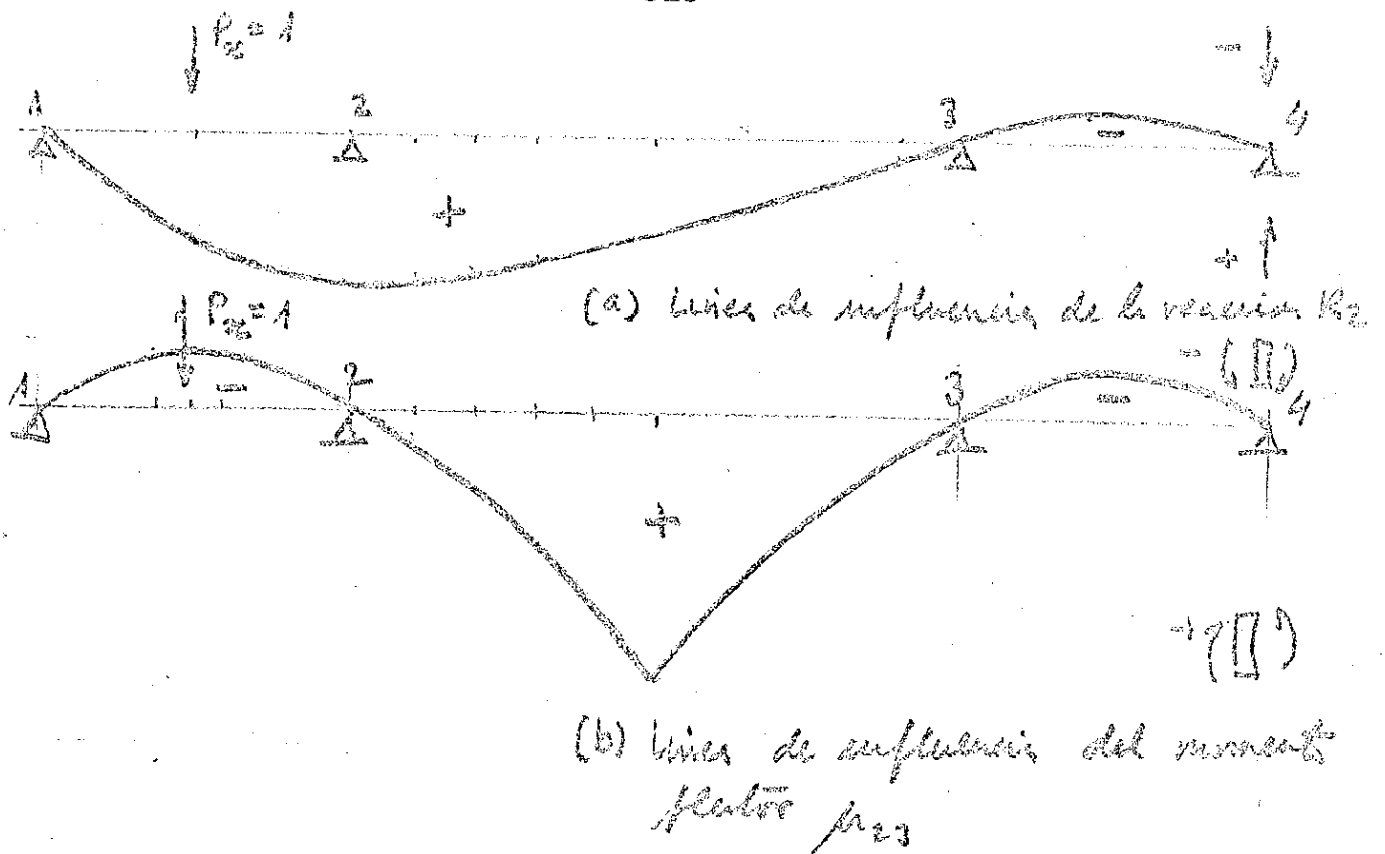


Figura 10.15. Ejemplo 10.3.

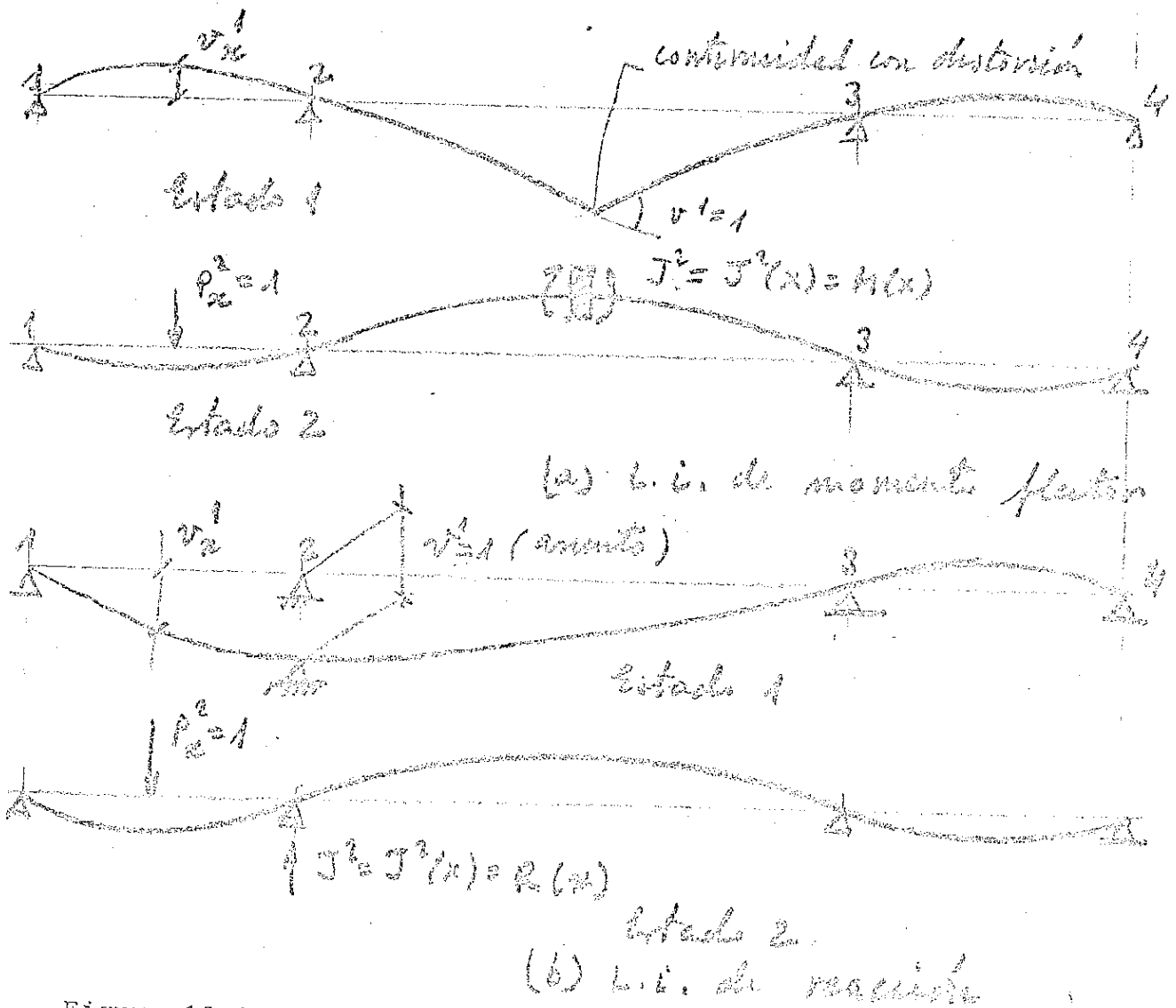


Figura 10.16. Aplicación del teorema de reciprocidad a una viga continua de tres vanos. Método dual.

Las líneas de influencia de estos resultados, cuando la carga móvil es un momento unidad, son las derivadas respecto a la abscisa  $x$  de las líneas de influencia anteriores.

Se observa que este procedimiento presenta complicaciones de cálculo en numerosas ocasiones, puesto que es preciso tratar barras con secciones liberadas a un esfuerzo (con rótulas o bielas - que transmiten axiles y momentos pero no flectores, etc.). Es posible simplificar el tratamiento de estos casos mediante la introducción de un nudo adicional, coincidente con la sección liberada, con lo que las barras son normales, es decir, sin discontinuidades pero ello implica un mayor esfuerzo de cálculo (incremento del número de nudos y a veces del grado de traslacionalidad). Existe un método alternativo de determinación de líneas de influencias de esfuerzos y reacciones, denominado dual, que evita estos inconvenientes.

#### 10.3.4. Líneas de influencia de esfuerzos y reacciones. Método dual

El concepto de dualidad hace referencia al hecho de que corresponde este método a la contrapartida del considerado con relación a la línea de influencia de un movimiento. En efecto; entonces la estructura original no se modificaba mediante ningún tipo de liberalización, y se introducía, para el cálculo de la línea de influencia del movimiento (o deformación), la fuerza (o esfuerzo) eficaz, con lo que la deformada resultante, eficaz con la carga móvil, era idéntica a la línea de influencia solicitada. Ahora, el esquema dual corresponde a introducir en la estructura original una deformación (o movimiento) eficaz con el esfuerzo (o reacción) resultado de la línea de influencia. La elástica que se produce en esta situación en la estructura, medida en dirección eficaz a la carga móvil, es directamente la línea de influencia. Para demostrar esta propiedad, y puesto que las acciones que se aplican a la estructura sin liberalizar son cinemáticas (deformaciones o movimientos impuestos), se debe aplicar el teorema de Maxwell o reciprocidad en su planteamiento más general, es decir, en energía potencial total:

$$v_1^2 = u_1^2 - w_1^2 = u_2^1 - w_2^1 = v_2^1$$

Con este objeto se considera la estructura sometida a los dos estados de carga siguientes: El primero,  $E_1$ , una deformación (o movimiento) impuesto,  $v^1$ , eficaz con el resultado - esfuerzo ó reacción - de la línea de influencia. El segundo estado,  $E_2$ , corresponde a la actuación de la carga móvil unidad,  $p_x^2 = 1$ , en una posición genérica definida por la distancia  $x$ . En este estado, el resultado de la línea de influencia (esfuerzo o reacción) se designa genéricamente por  $J^2 = J(x)$ . Aplicando el teorema general de Maxwell, se deduce:

$$v_1^2 = v_2^1$$

con  $v_1^2 = 0$

$$v_2^1 = u_2^1 - w_2^1 = J^2 (v^1 = 1) - (p_x^2 = 1) v_x^1$$

es decir  $J^2 = v_x^1$  (10.11)

que confirma el procedimiento dual enunciado para el cálculo de líneas de influencias de esfuerzos y reacciones. Conviene insistir que los signos de  $J^2$  y  $v_x^1$  son positivos si coinciden con los de las correspondientes contrapartidas,  $(v^1 = 1)$  y  $(p_x^2 = 1)$  respectivamente. Por otra parte, el valor unidad de  $v^1$  hace referencia a una medida infinitesimal, ya que la teoría de cálculo que se utiliza es lineal, y la geometría de la estructura que se considera corresponde a la inicial de esta estructura es decir, sin deformación.

En este procedimiento de cálculo de líneas de influencia, es conveniente conocer la solución inicial, así como la deformada de cada viga de la estructura, puesto que la línea de influencia coincide con la deformada finales de esta, suma inicial o impuesta y la modal.

En el caso de líneas de influencias de reacciones, se debe introducir un movimiento eficaz en la coacción de apoyo correspondiente, es decir, un asiento. Este tipo de carga fue analizado con detalle en capítulos anteriores. Sin embargo, si se trata de una línea de influencia de un esfuerzo en una sección determinada, la deformación impuesta que se aplica en dicha sección, denominada también distorsión, conduce a una deformada inicial y a unos esfuerzos iniciales para el cálculo de Cross, que merecen ser comentados. Se hará referencia en lo que sigue a la figura 10.17.

La distorsión angular ( $v^1 = 1$ ) en una viga biempotrada - conduce a los giros en los extremos de la barra de valores  $\theta_1 = 1 - \frac{a}{L}$  y  $\theta_2 = -\frac{a}{L}$ , con lo que los momentos de empotramiento rígido son:

$$M_1^0 = R_1 \left(1 - \frac{a}{L}\right) - R_2 \gamma_{21} \frac{a}{L}$$

$$M_2^0 = R_1 \gamma_{12} \left(1 - \frac{a}{L}\right) - R_2 \frac{a}{L}$$

y si la barra es de sección constante, las expresiones anteriores se convierten en las siguientes:

$$M_1^0 = -\frac{2EI}{L^2} (3a - 2L)$$

$$M_2^0 = -\frac{2EI}{L^2} (3a - L)$$

Si la barra está articulada en el extremo 2, se deduciría, para el caso general

$$M_1^0 = R_1^{ea} \theta_1 = R_1 (1 - \gamma_{12} \gamma_{21}) \left(1 - \frac{a}{L}\right)$$

y cuando la sección es constante

$$M_1^0 = \frac{3EI}{L^2} (L - a)$$

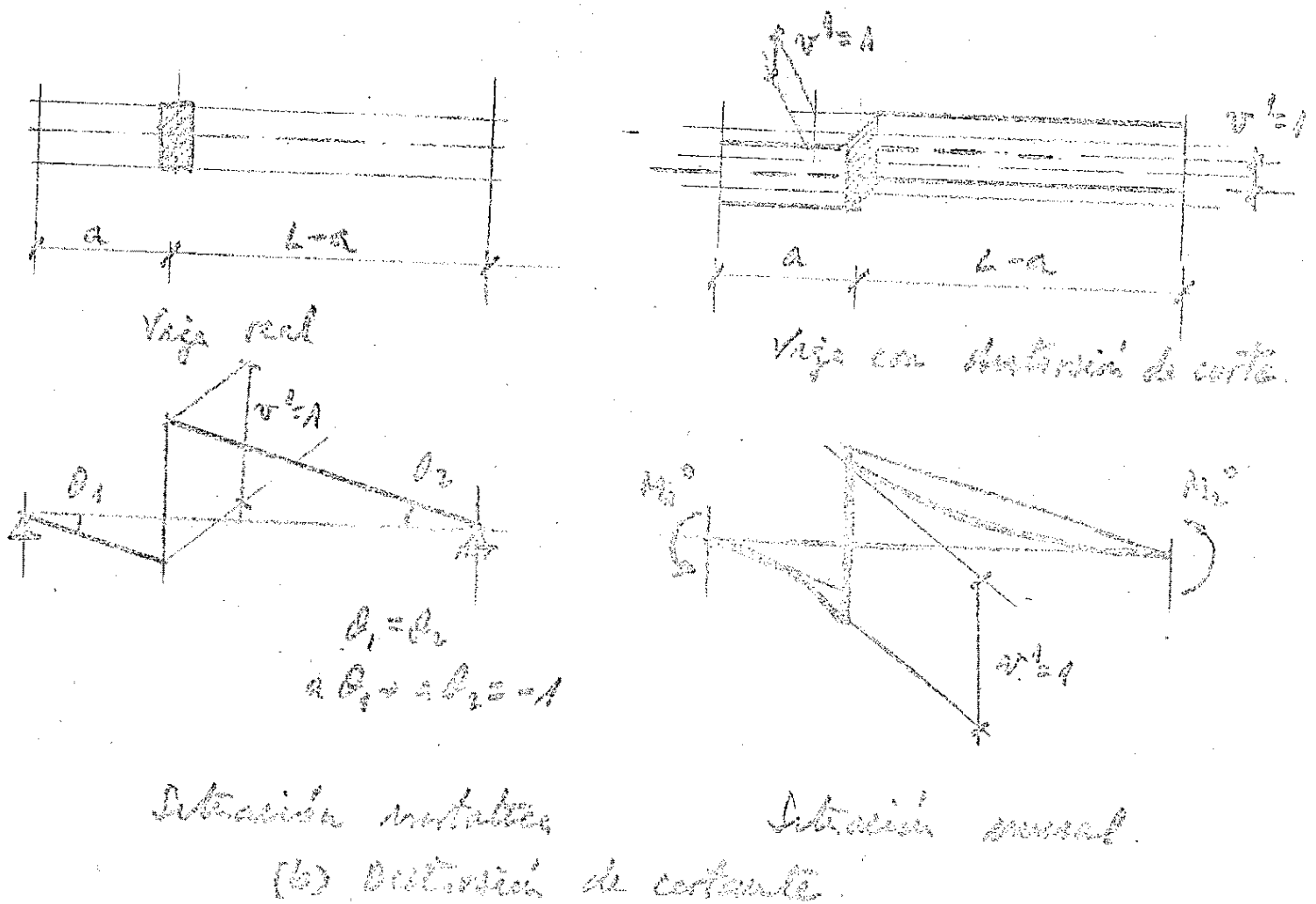
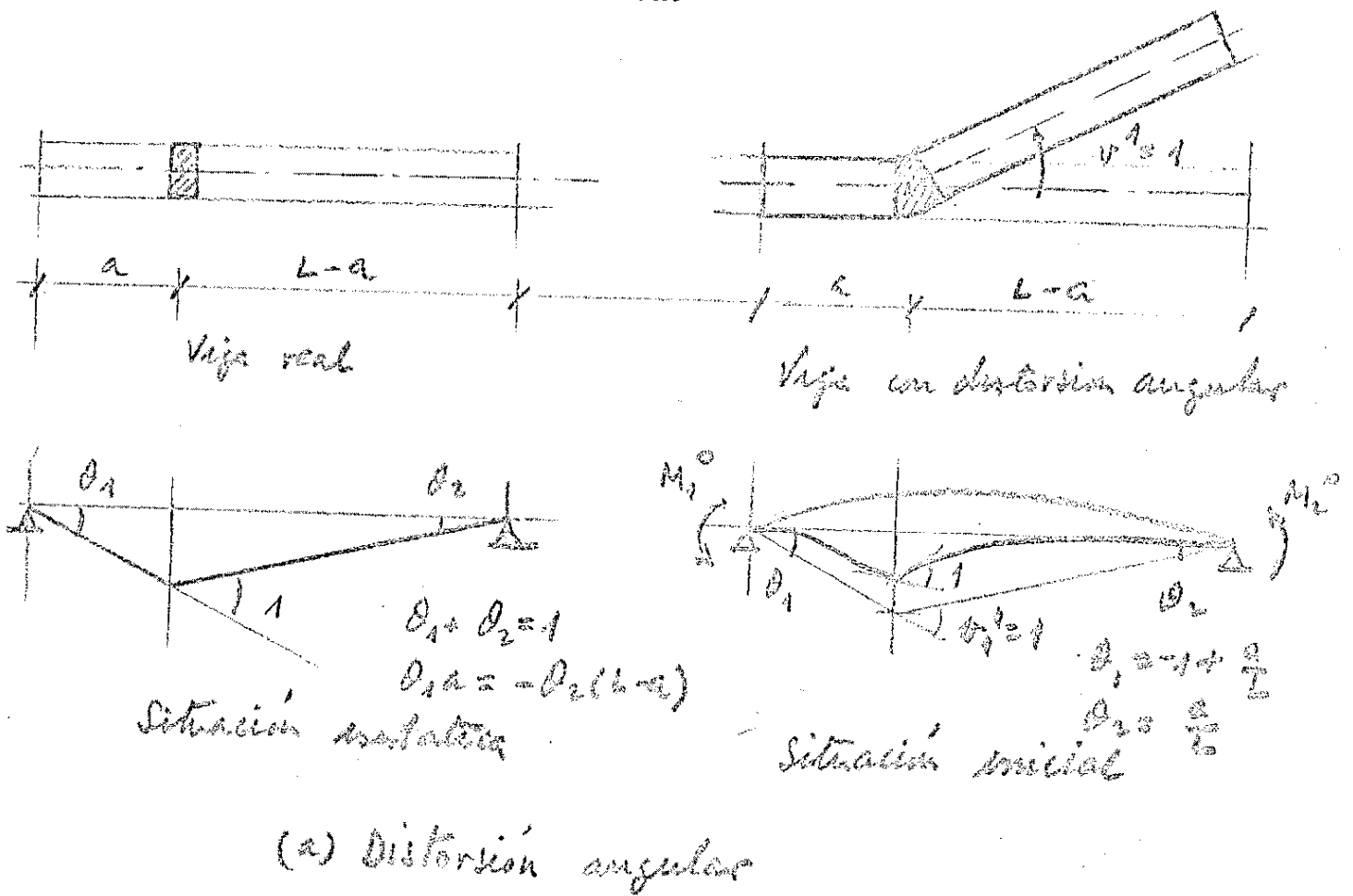


Figura 10.17. Determinación de la solución inicial en barras con distorsión.



La distorsión unidad de cortante ( $\gamma^1 = 1$ ) en una viga bien potrada implica para que conserven su tangente inicial, un giro de los extremos, de valor:

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{L}$$

con lo que los momentos de empotramiento rígido son:

$$M_1^0 = \frac{1}{L}(R_1 + R_2 \gamma_{21})$$

$$M_2^0 = \frac{1}{L}(R_1 \gamma_{12} + R_2)$$

que en el caso de sección constante se transforman en la siguientes:

$$M_1^0 = M_2^0 = 6 \frac{EI}{L^2}$$

En el caso de articulación en el extremo 2, las expresiones de los momentos de empotramiento perfecto son:

$$M_1^{ea} = R_1^{ea} \theta_1 = R_1 (1 - \gamma_{12} \gamma_{21}) \frac{1}{L} \quad (\text{sección variable}).$$

$$M_1^{ea} = 3 \frac{EI}{L^2} \quad (\text{sección constante}).$$

Si la distorsión es de axil, ésta es simplemente una dilatación unidad (alargamiento) de la barra, suponiendo que el signo positivo del esfuerzo axil corresponde a la tracción. Este caso, conjuntamente con el de asientos impuestos, ha sido estudiado en un capítulo anterior.

Ejemplo 10.4. Resolver mediante el esquema dual, el ejemplo 10.3.

La primera línea de influencia es idéntica a la elástica de la estructura producida por un asiento vertical unidad. (Figura

10.16a). Los momentos de empotramiento rígido se calculan mediante las fórmulas del capítulo 8, referentes a movimientos impuestos en estructuras. El cálculo de Cross se resume en la tabla 10.8. En la determinación de la deformada de la estructura, eficaz con la acción móvil, o leyes de flechas verticales  $v_x^1$ , es preciso tener en cuenta la deformada inicial, o mejor, la isóstática, correspondiente a las rectas  $\frac{x}{L}$  y  $1 - \frac{x}{L}$  en los vanos 1-2 y 2-3, respectivamente.

TABLA 10.10. Cálculo de Cross

NUDO	2		3	
BARRA	2-1	2-3	3-2	3-4
R	$\frac{3EI}{L}$	$\frac{4EI}{L}$	$\frac{4EI}{L}$	$\frac{3EI}{L}$
k	0,429	0,571	0,571	0,429
$M^0$	3	-6	-6	0
$M^1$	1,286	1,714	3,429	2,571
$M^2$	-	1,714	0,857	-
$M^3$	-0,735	-0,979	-0,490	-0,367
$M^4$	-	-0,245	-0,490	-
$M^5$	0,105	0,140	0,280	0,210
$M^6$	-	0,140	0,070	-
$M^7$	-0,060	-0,080	-0,040	-0,030
$\dot{M}$	3,596	-3,596	-2,384	2,384

$\times \frac{EI}{L^2}$

Ley de flechas (positivas hacia abajo) son:

$$\text{Vano 1-2: } v_x^1 = \frac{3,596}{6} \psi\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{x}{L} \quad 0 \leq x \leq L$$

$$\text{Vano 2-3: } v_x^1 = \frac{3,596}{6} \psi\left(1 - \frac{x}{L}\right) + \frac{2,384}{6} \psi\left(\frac{x}{L}\right) + 1 - \frac{x}{L} \quad 0 \leq x \leq L$$

Vano 3-4:  $v \frac{1}{x} = - \frac{2,384}{6} \psi(1 - \frac{x}{L})$   $0 \leq x \leq L$

siendo

$\psi(\frac{x}{L}) = \frac{x}{L}(1 - \frac{x^2}{L^2})$  y sus valores, a décimos de luz, son:

$\frac{x}{L} =$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\psi(\frac{x}{L})$	0,000	0,099	0,192	0,273	0,336	0,375	0,384	0,357	0,288	0,171	0,000

Se observa que los valores obtenidos de las expresiones anteriores coinciden con los de la tabla 10.8.

De un modo semejante se determina la línea de influencia - del momento flector en la sección central del vano 2-3. En este caso la estructura está sometida a una carga simétrica y puede simplificarse el cálculo del modo que se muestra en la tabla 10.11.

TABLA 10.11. Cálculo de Cross. (Simétrico).

NUDO	2	
BARRA	2-1	2-3
R	$\frac{3EI}{L}$	$\frac{2EI}{L}$
k	0,6	0,4
M <sup>0</sup>	0	1
M <sup>1</sup>	-0,6	-0,4
M	-0,6	0,6

$\times \frac{EI}{L}$

Las leyes de flechas verticales (positivas hacia abajo) - son:

$$\text{Vano 1-2: } v_x^1 = -\frac{1}{10}\psi\left(\frac{x}{L}\right)L \quad 0 \leq x \leq L$$

$$\text{Vano 2-3: } v_x = \left\{-\frac{1}{10}\psi\left(\frac{x}{L}\right) + \frac{x}{2L}\right\}L \quad 0 \leq x \leq L$$

y los valores en las restantes secciones se obtienen por simetría.

Los resultados numéricos deducidos con las fórmulas anteriores coinciden con los presentados en la tabla 10.9.

#### 10.4. ANÁLISIS COMPARATIVO ENTRE LOS DISTINTOS MÉTODOS DE DETERMINACIÓN DE LÍNEAS DE INFLUENCIA

De la exposición anterior se comprende la ventaja de utilizar el teorema de Maxwell en la determinación de las líneas de influencia de una estructura, en comparación con el de las acciones unitarias (o esfuerzos 100). Particularmente esta ventaja se manifiesta en las estructuras de nudos desplazables y en los casos de pocas líneas de influencia. Conviene tener presente que las situaciones de estructuras de nudos fijos y desplazables se tratan de un modo idéntico mediante el teorema de reciprocidad; únicamente varía la determinación de la curva deformada, que debe llevarse a cabo de acuerdo con la traslacionalidad de la estructura. Por el contrario, en el método de las acciones unitarias la complicación del cálculo aumenta al ser la estructura traslacional.

Por consiguiente, sólo es aconsejable la utilización del método de las acciones unitarias en los casos de estructuras intraslacionales, de pocos nudos, y para las cuales se precisa conocer un número elevado de líneas de influencia, puesto que a partir del cálculo de los estados básicos, las diferentes líneas de influencia se obtienen con un esfuerzo adicional de cálculo muy pequeño. Sin embargo en el método que se apoya en el teorema de Maxwell cada línea de influencia exige un cálculo específico.

Si se utilizan programas generales de cálculo de estructu-

ras por computador, es preferible igualmente el método del teorema de la reciprocidad, haciendo uso del concepto de influjo o distorsión - unidad, según se desee conocer la línea de influencia de un movimiento (o deformación), o la línea de influencia de una reacción (o esfuerzo), respectivamente. Es importante considerar, en el caso de distorsión, que ésta se aplica sobre la estructura original, sin necesidad de modificarla mediante la introducción de una liberalización obteniéndose, de esta forma, todas las líneas de influencia como distintas hipótesis de carga sobre la misma estructura inicial.

Por último, conviene observar que todos los movimientos - (giros y desplazamientos) obtenidos en el cálculo anterior representan distintas líneas de influencia correspondientes al mismo resultado, pero bajo acciones móviles unitarias diferentes (momento o fuerza móvil); incluso los resultados del cálculo, leyes de momentos - flectores divididos por  $EI$  en cada sección, constituyen las líneas de influencia de la acción móvil unitaria correspondiente a un momento flector interno, lo que podría ser de interés en un diseño de las armaduras de pretensado, por ejemplo.

### EJERCICIOS ENUNCIADOS

10.1. Resolver el ejemplo 10.1 mediante la utilización del teorema de reciprocidad, según cada uno de los dos procedimientos: liberalización de la estructura (cuando sea posible) y esquema dual.

10.2. En la viga continua de la figura 10.18 la sección es constante de  $0,30 \times 0,50$  (ancho  $\times$  canto).

Hallar los máximos momentos flectores en A, B y C, y en el centro del 2º vano, D, bajo la acción del peso propio y la actuación de una sobrecarga de  $3 \text{ T/m}$  en las zonas más desfavorables.

Peso propio del hormigón:  $2,5 \text{ T/m}^3$ .

10.3. Determinar la línea de influencia del momento flector en la sección A-A de la viga continua de la figura 10.19 cuando recorre una carga vertical el dintel.

Se darán los valores de la línea de influencia en las secciones  $x = 0; 1.0; 3.5; 5.0; 7.0; 9.0$  y  $10 \text{ m}$ .

Se recomienda utilizar el teorema de reciprocidad.

10.4. Hallar las líneas de influencia del momento flector y del esfuerzo cortante en A en la estructura de la figura 10.20 cuando la carga unidad descendente recorre el dintel EF.

Se utilizará el método de los "momentos 100".

10.5. Resolver el ejercicio 10.4 mediante el teorema de reciprocidad.

10.6. Valores máximos y mínimos de los siguientes esfuerzos en la sección A de la estructura de la figura 10.21:



Figura 10.18. Ejercicio 10.2.

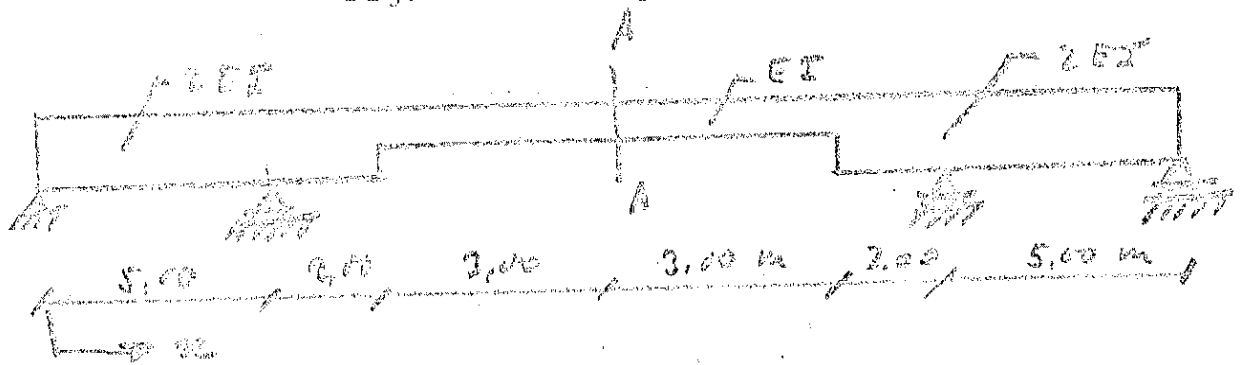


Figura 10.19. Ejercicio 10.3.

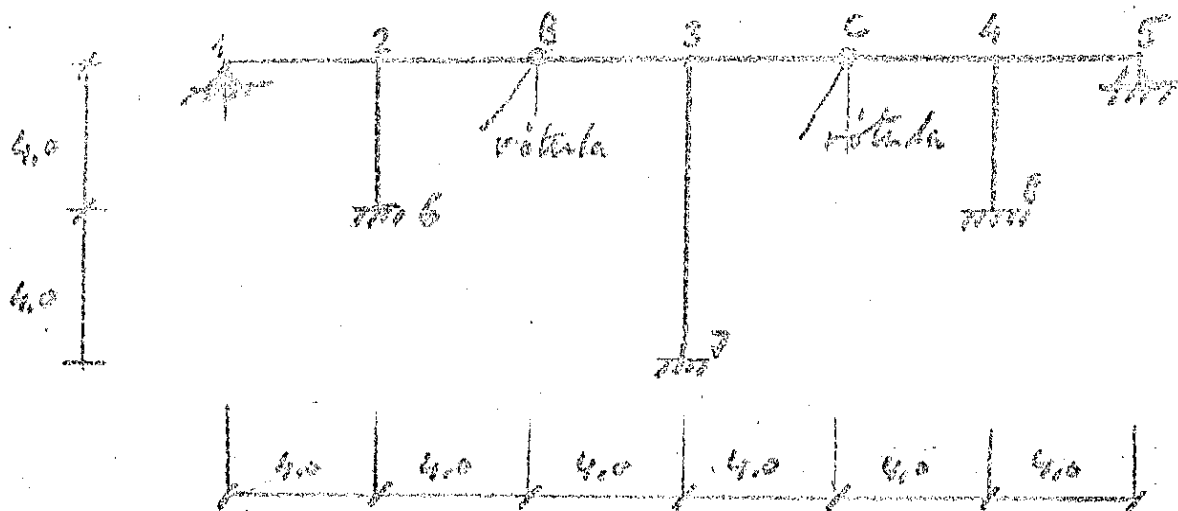


Figura 10.20. Ejercicio 10.4.

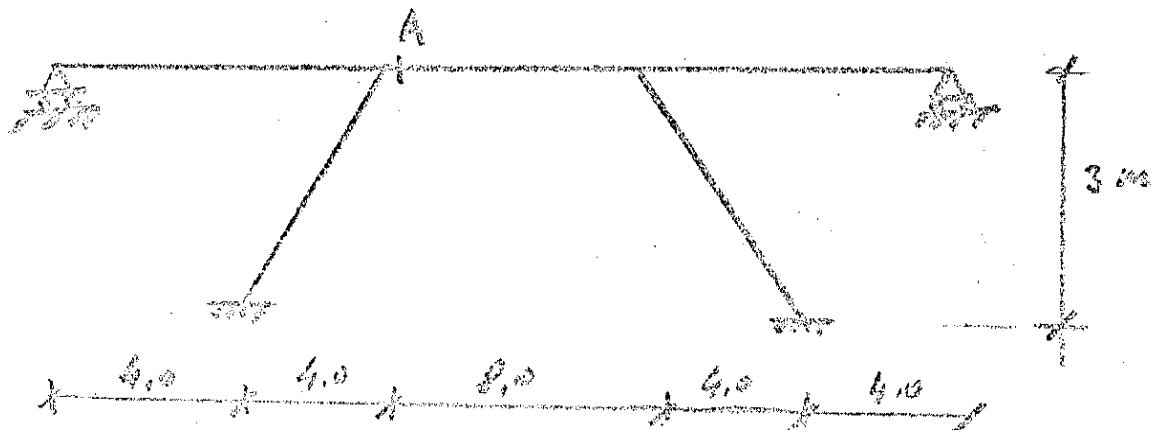


Figura 10.21. Ejercicio 10.6.

Momento flector, esfuerzo cortante y axil, cuando recorre una carga puntual de 20 Ton. el dintel.

$$E = 2 \times 10^6 \text{ Ton/m}^2.; \quad \Omega = 0,4 \times 0,3 \text{ m}^2.$$

- 10.7. En la estructura indicada y por el método de "RECIPROCIDAD", hallar la línea de influencia del momento flector en la sección A, de la figura 10.22 cuando una carga vertical descendente recorre el dintel superior. Se darán los valores de la línea de influencia en puntos situados a cuartos de luz de cada vano del dintel.

Características de la barra:

1-2, 3-4 y 4-6: Sección rectangular de 10 m. de ancho y 1 m. de canto.

2-3 y 4-5 : 4 barras cilíndricas de 1 m. de diámetro.

- 10.8. Hallar los momentos máximos en A cuando una carga vertical de 100 T recorre el dintel superior de la estructura de la figura 10.23.

- 10.9. Determinar la línea de influencia del esfuerzo axil en la barra 2-3 de la estructura representada en la figura 10.24. se darán los resultados a cuartos de luz de cada vano del dintel y se supone la carga móvil vertical descendente.

Características de las barras:

1-3, 3-4 y 4-6: Sección rectangular de 10 m. de ancho y 1 m. de canto.

2-3 y 4-5 : 4 barras conicas circulares de 1 m. de diámetro en el contacto con el dintel y 0.5 m. en la articulación.



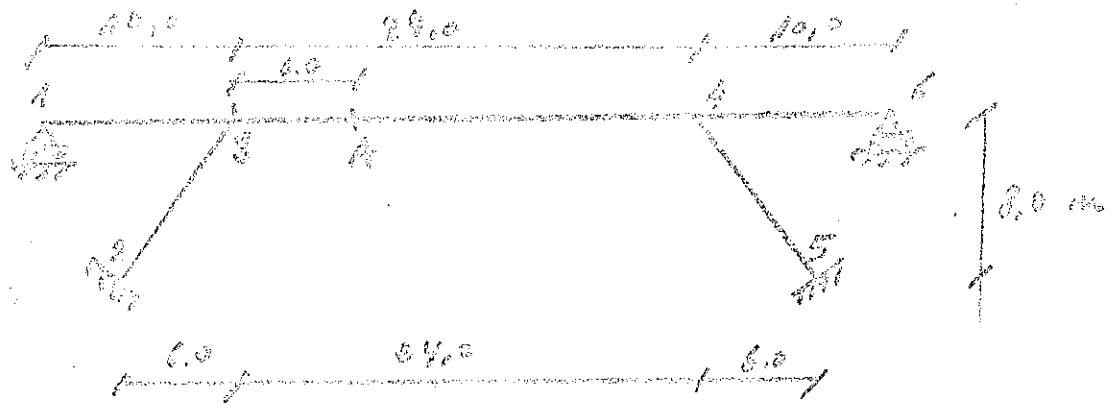


Figura 10.22. Ejercicio 10.7.

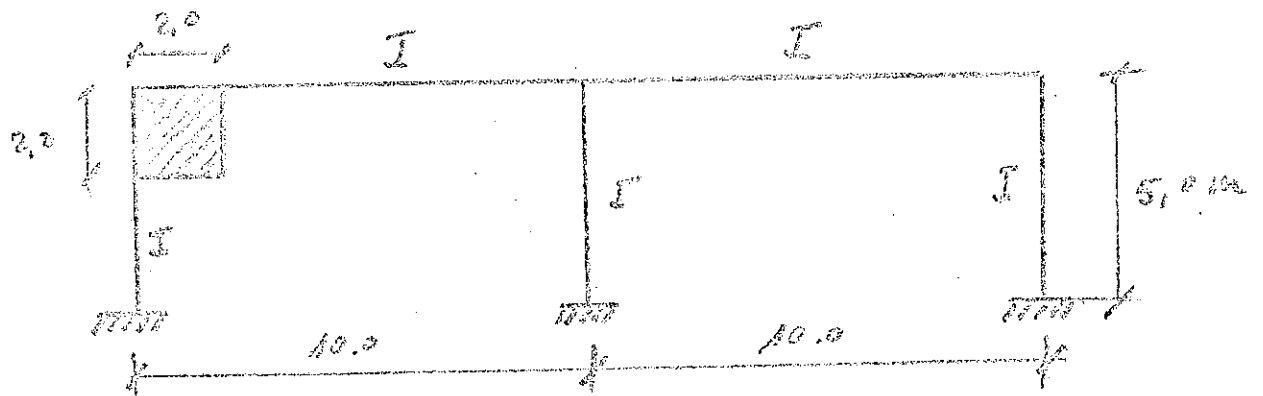


Figura 10.23. Ejercicio 10.8.

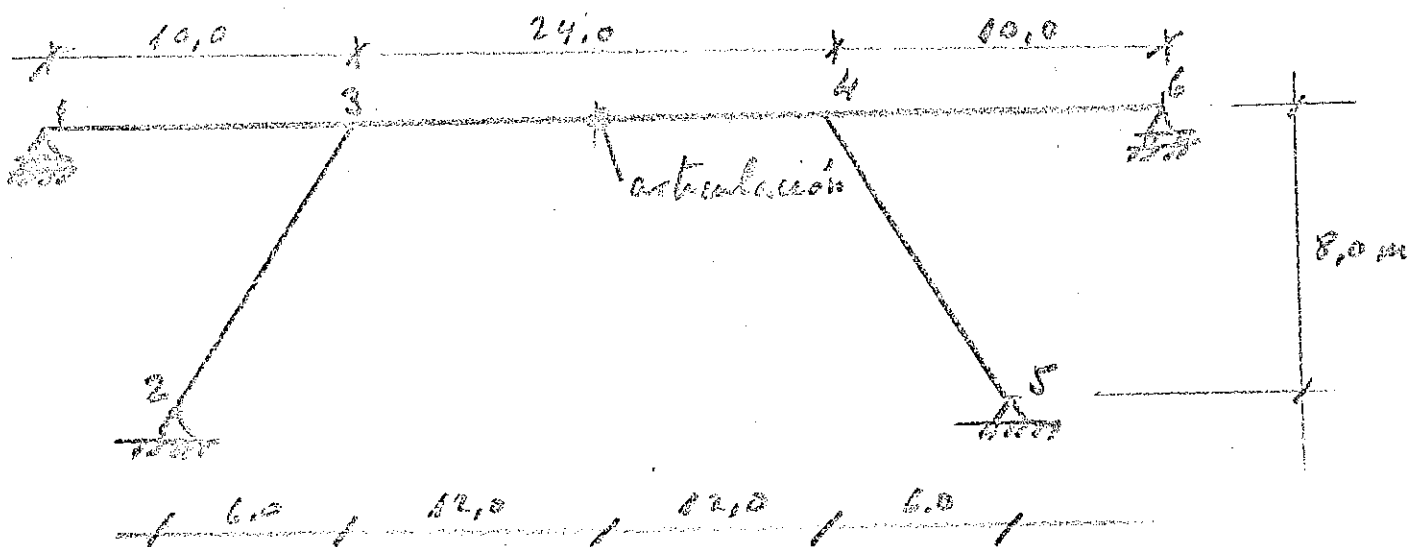


Figura 10.24. Ejercicio 10.9.

- 10.10. Determinar la línea de influencia del esfuerzo cortante en la sección A-A de la viga continua de la figura 10.25. Se darán los resultados de las ordenadas de esta línea de influencia en las secciones 1-1, 2-2, 3-3 y A-A.

Los vanos laterales son sendas vigas de sección constante y rigidez (supuesta empotrada-articulada) igual a  $3 \times 10^3$  mt.

El vano central está compuesto de una viga recta de sección variable y de longitud 4.00 m, de rigideces  $\rho_1$  y  $\rho_2$  y coeficientes de transmisión  $\gamma_{12}$  y  $\gamma_{21}$ ; a continuación, un elemento recto de longitud 10.00 m y rigidez infinita a flexión. El tercer elemento es una viga simétrica a la primera respecto de la sección central A-A.

DATOS:  $\rho_1 = 20,12 \cdot 10^3$  mt.

$\rho_2 = 6,66 \times 10^3$  mt.

$\gamma_{12} = 0,32$

$\gamma_{21} = 0,96$

- 10.11. Obtener la línea de influencia del esfuerzo axial de la barra 3-6 de la estructura de la figura 10.26. cuando una carga vertical descendente recorre el dintel 2-3-4. La línea de influencia se definirá por sus valores obtenidos de metro en metro.

Las barras 1-2, 2-3, 3-4 y 4-5 son inextensibles y su sección es rectangular de ancho 0,40 m y canto 0,80 m en las barras 2-3 y 3-4, y un canto de 0,40 m en las 1-2 y 4-5.

Las barras 2-6, 3-6 y 4-6 son tirantes extensibles de  $15 \text{ cm}^2$  de área de la sección transversal y un módulo de elasticidad 10 veces mayor que en las barras anteriores.

- 10.12. Determinar la línea de influencia del momento flector en la sección 4 del pórtico que se indica en la figura 10.27, cuan

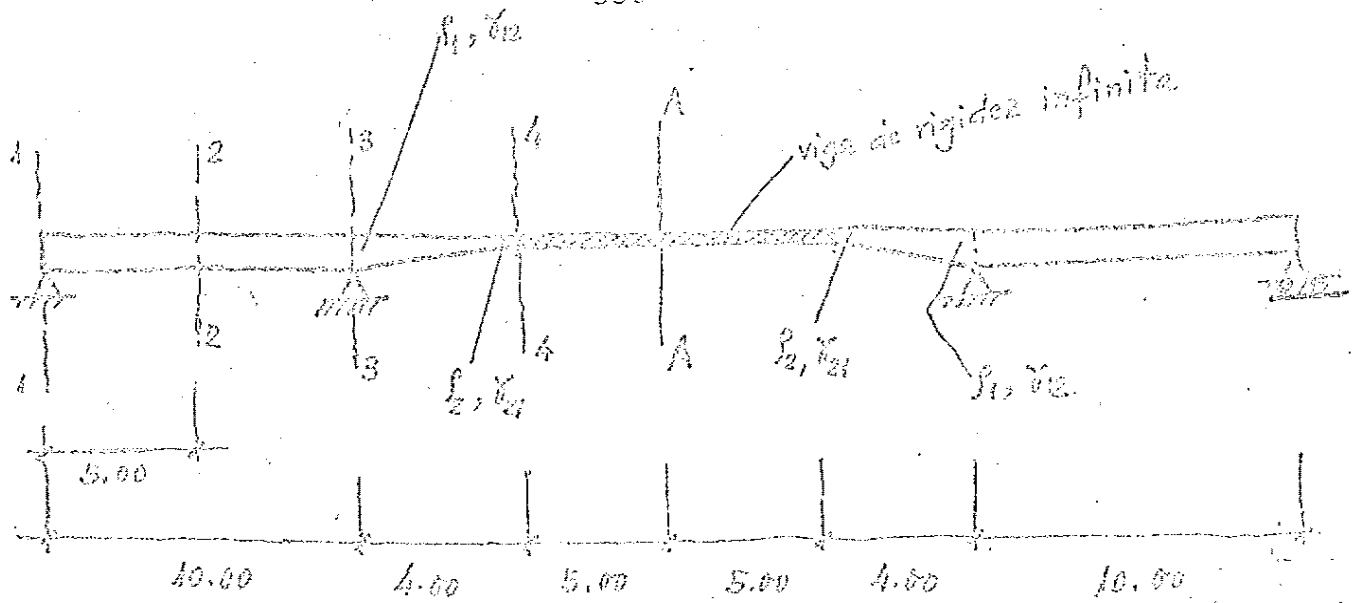


Figura 10.25. Ejercicio 10.10.

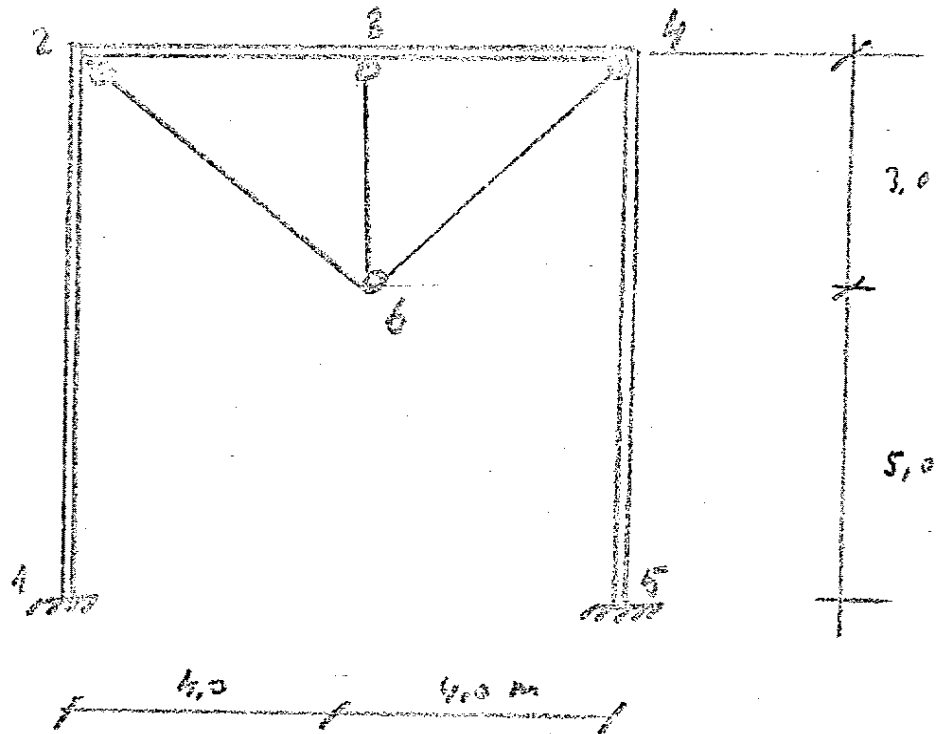


Figura 10.26. Ejercicio 10.11.

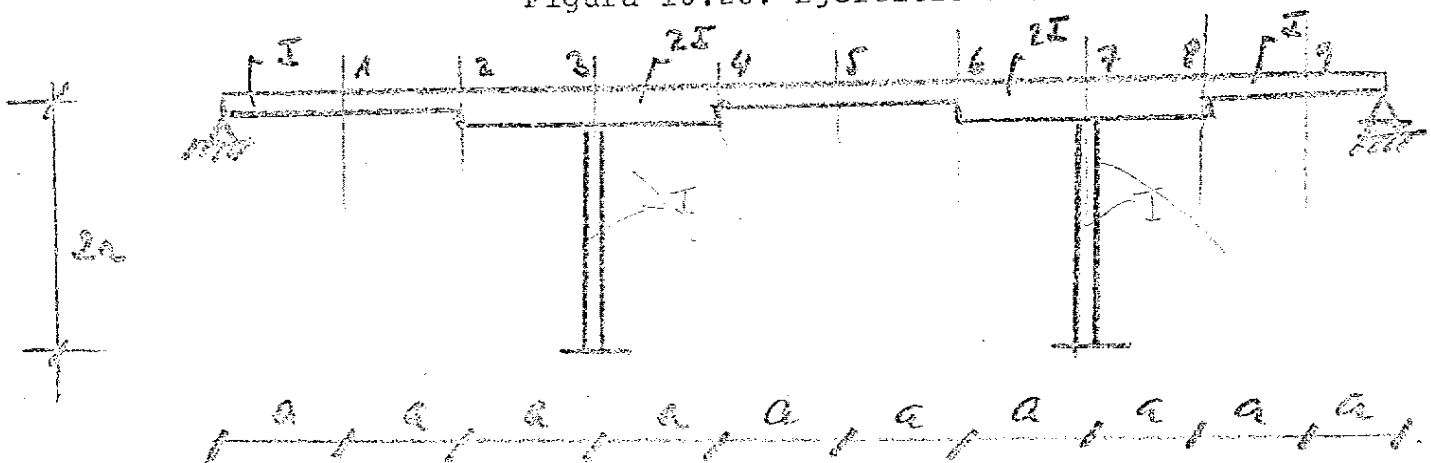


Figura 10.27. Ejercicio 10.12.

do una carga vertical descendente de 1 tonelada recorre el dintel. Se darán los resultados en m.t en todas las secciones de 1 a 9, indicando el sentido, positivo si aparecen tracciones - en la cara inferior del dintel.

$$a = 4 \text{ m.}$$

Se recomienda utilizar el teorema de reciprocidad.

10.13. Características de las barras de la estructura de la figura 10.28.

AF y ED	Area = $3,0 \text{ m}^2$ .	Inercia $\approx 0$	$\text{m}^4$ .
AB y CD	Area = $15,0 \text{ m}^2$ .	Inercia $\approx 3,9$	$\text{m}^4$ .
BF y CE	Area = $15,0 \text{ m}^2$ .	Inercia $\approx 3,0$	$\text{m}^4$ .

La barra BC es simétrica y a efectos de este cálculo se puede considerar formada por tramos de inercia constante, como se indica en la figura 10.58 con  $I_1 = 8,0 \text{ m}^4$ ;  $I_2 = 2,0 \text{ m}^4$ .

Módulo de elasticidad de todas las barras  $E = 200.000 \text{ Kg/cm}^2$ .

Todas las barras se consideran inextensibles a excepción de las barras AF y ED.

Se pide:

Determinar en la sección central H de la barra BC los máximos y mínimos momentos flectores. La carga móvil es puntual vertical de 100 t.

10.14. Dos cargas verticales, iguales, de valor P pueden actuar ó no sobre la estructura, de la figura 10,29, pero nunca más de una en el mismo vano del dintel.

Se pide:

- 1ª. Justificar y hallar la posición de la carga  $P$  ó de las dos cargas  $P$  (una en cada vano) que producen la máxima tracción y la máxima compresión en el tirante (a). Determinar estos valores máximos.
- 2ª. Justificar si existe algún estado de cargas, no simétrico respecto al soporte central, en que no trabaje el tirante (a) y, si es así, hallarlo.

Se supone el tirante (a) indeformable.

- 10.15. Determinar la línea de influencia del momento flector en la sección A de la estructura reticulada indicada en la figura 10.30. Carga vertical descendente.

El dintel 1-2-3-4 es de sección constante de inercia  $I$ . Los soportes 2-5 y 3-6 son de inercia variable linealmente desde  $I$  en los nudos 2 y 3, a la inercia  $I' = k.I$ , en los nudos 5 y 6.

Le módulo de elasticidad  $E_b$  es igual en todas las barras. Existe un tirante (3-5), de área  $\Omega$  y módulo de elasticidad  $E_a$ .

La sustentación de la estructura en los nudos 5 y 6 es elástica, suponiéndose que un momento  $M_0$  aplicado a la cimentación de cada uno de ellos produce un giro  $\theta_0$ .

Datos numéricos:

$$l = 12 \text{ m} ; \quad \lambda = 0.75.$$

Sección del dintel: Canto 1.00 - Ancho 0.50 m.

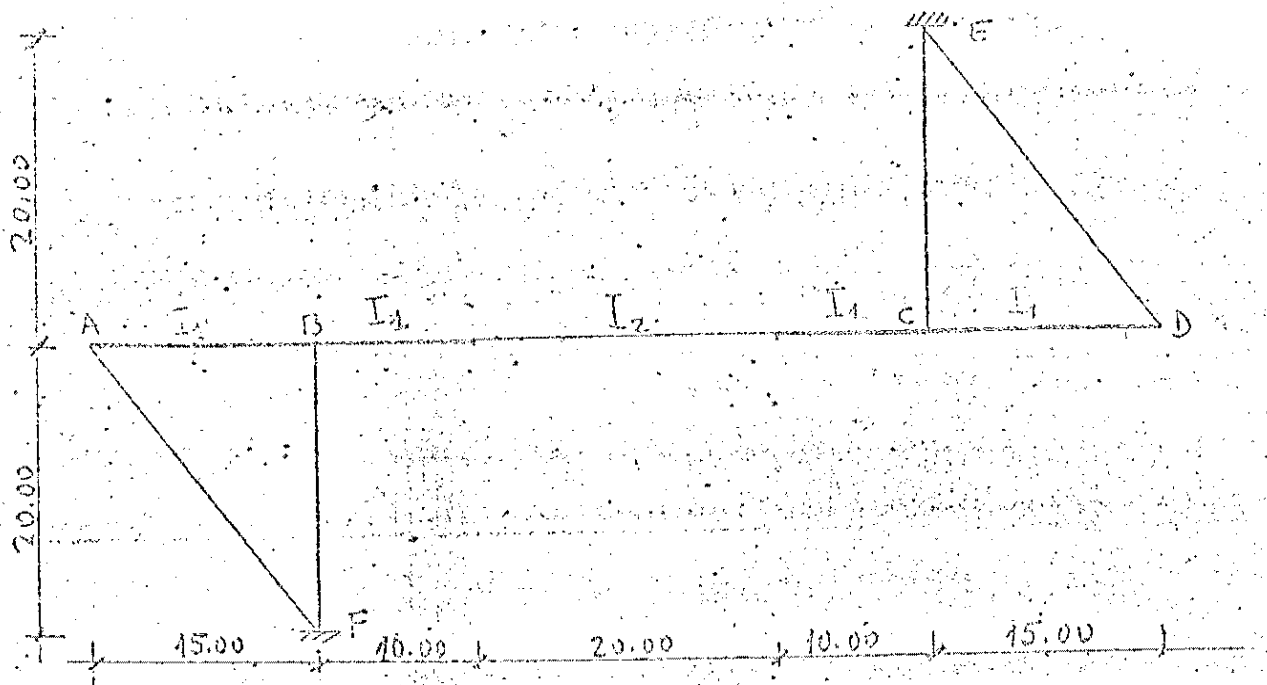


Figura 10.28. Ejercicio 10.13.

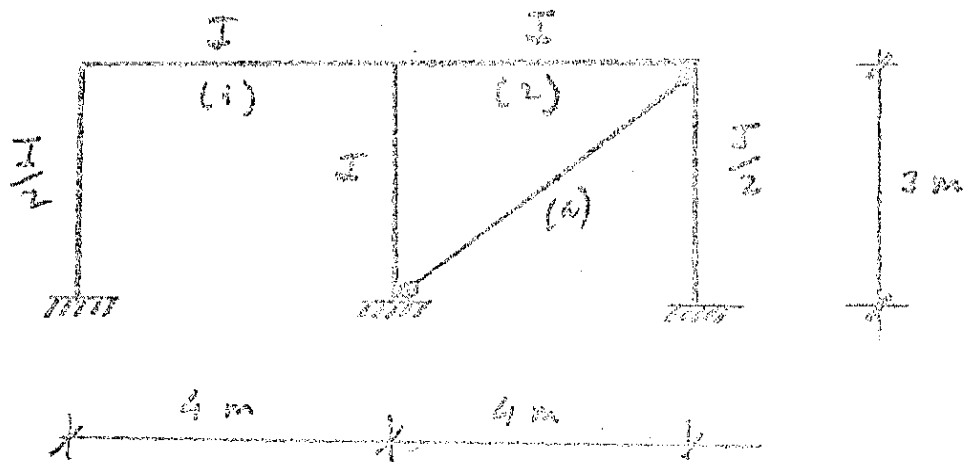


Figura 10.29. Ejercicio 10.14.

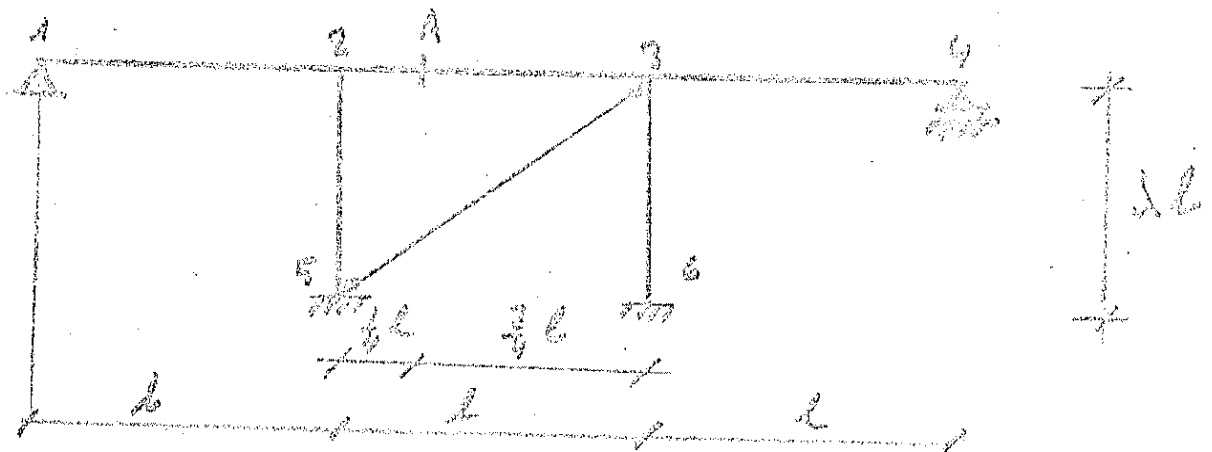


Figura 10.30. Ejercicio 10.15.

$$k = 2$$

$$E_b = 300.000 \text{ kg/cm}^{-2}.$$

$$\Omega = 100 \text{ m.t.}$$

$$E_a = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^{-2}.$$

$$\theta_0 = 5 \times 10^{-3} \text{ radianes.}$$

- 10.16. La estructura ABCDE de la figura 10.31 es de hormigón armado con  $E_h = 200.000 \text{ Kg/cm}^2$ . y todas sus barras tienen de sección  $60 \times 20 \text{ cm}$ .

El resto es una estructura articulada de acero con  $E_a = 2.000.000 \text{ Kg/cm}^2$ .

Se pide:

Línea de influencia del giro expresado en radianes en el extremo C de la pieza BC cuando la carga unidad de 1 T. vertical recorre el cordón CF.

- 10.17. La estructura reticulada 1-2-3-4-5-6 de la figura 10.32 constituye un paso superior sobre carretera, que debe ser reforzado mediante la estructura articulada A B C D.

Con objeto de comprobar este refuerzo se pide determinar el esfuerzo axil en la barra BC cuando una carga vertical de 60 t recorre el dintel 1-2-4-5. Se calcularán estos valores del esfuerzo para posiciones de la carga cada 5,00 m a partir del nudo 1.

Características de las barras:

Barras 1-2 y 2-4 y 4-5 canto = 2,00 y ancho = 3,00 m.

Barras 2-3 y 4-6: canto = 1,00 y ancho = 3,00 m.

Módulo de elasticidad de la estructura reticulada.

$$E = 2 \times 10^6 \text{ tm}^{-2}.$$

En todas las barras de la estructura articulada se supone que sus características cumplen la condición  $\frac{E\Omega}{L} 4 \times 10^5 \text{ tm}^{-1}$ .

- 10.18. La figura 10.33 representa una pasarela para peatones. En una primera aproximación para el cálculo estructural, se puede suponer que constituye un entramado plano (con barras inelásticas y nudos rígidos). En la sección centro luz del vano central (sección A-A) existe una unión que permite la transmisión de esfuerzos cortantes y momentos flectores, pero no de esfuerzos axiales, como se indica en el detalle de la figura.

Todas las barras se suponen prismáticas, y a efectos de cálculo se puede admitir que la inercia del dintel es tres veces la inercia de los soportes inclinados.

Se pide:

Determinar la línea de influencia del esfuerzo axial del soporte 1-2, cuando actúa una carga vertical descendente de 100 t. a lo largo del dintel 2-3-4-5. Las coordenadas de esta línea de influencia se darán cuartos de la luz de cada vano y se indicará claramente el convenio de signos adoptado. El módulo de elasticidad del material es  $E = 2 \times 10^6 \text{ t.m}^{-2}$ .

Nota : Se realizarán los cálculos de Cross hasta  $M^5$  de aproximación.

- 10.19. En la estructura de la figura 10.34 se pide determinar la línea de influencia del momento flector en la sección A cuando una carga vertical unitaria descendente recorre el dintel 1-2-3-4. Se darán los valores numéricos de la línea de influencia cada 3,00 m. indicando específicamente el convenio de signos adoptado.



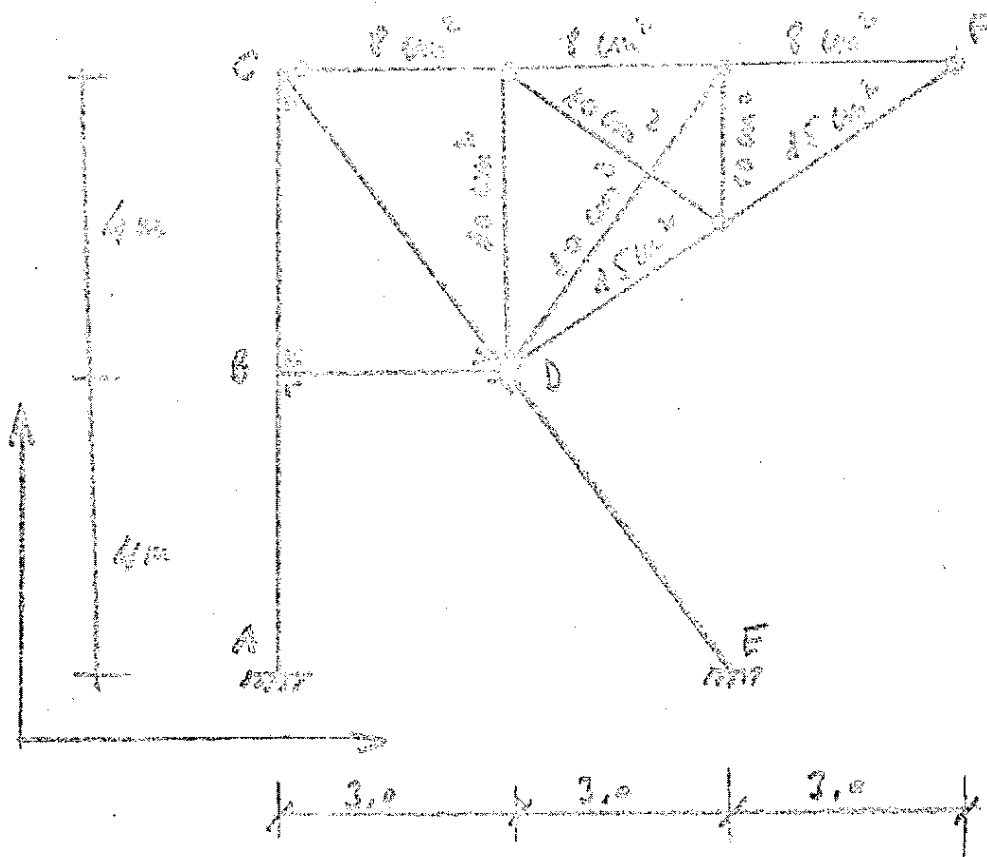


Figura 10.31. Ejercicio 10.16.

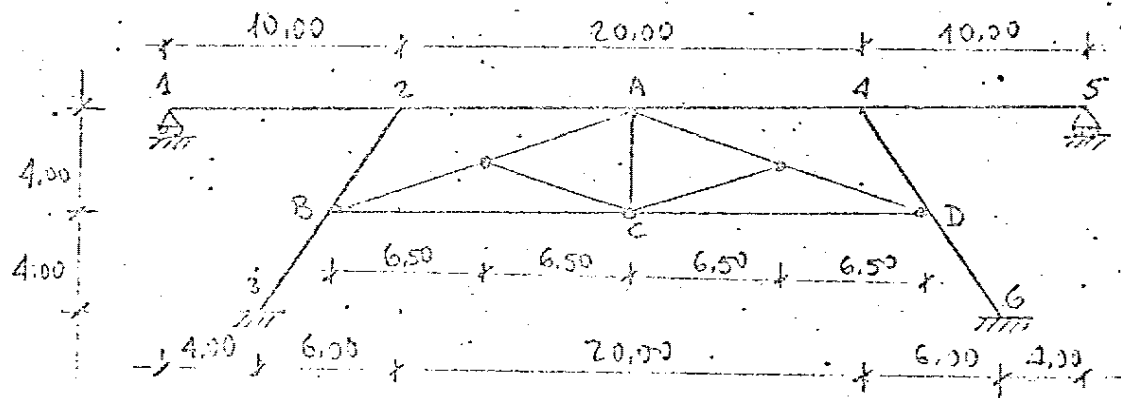


Figura 10.32. Ejercicio 10.17.

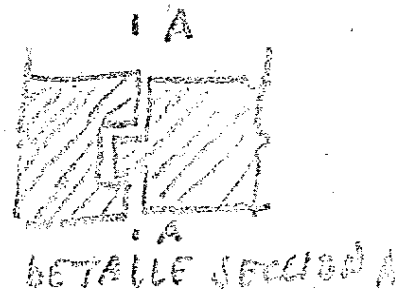
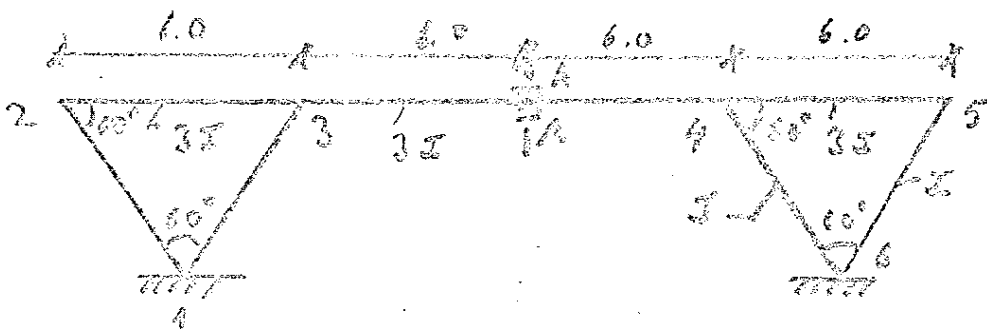


Figura 10.33. Ejercicio 10.18.

10.20. La sección transversal representada en la figura 10.35a corresponde a una pasarela de hormigón para uso de peatones, cuyo esquema estructural (entramado plano), representado en la figura 10.35b, puede ser válido para un cálculo longitudinal. Las pilas, asimismo de hormigón armado, son de sección rectangular, de ancho 3.00 m y canto 1.00 m y se encuentran empotradas rígidamente en las zapatas B1-B2 y B3-B4. Estas pueden considerarse infinitamente rígidas a las deformaciones de cortante, axil y flexión, y constituyen los encepados de dos y tres pilotes, respectivamente, con sección cuadrada de 0.80 x 0.80 m, y longitud teóricamente infinita. Estos pilotes son infinitamente rígidos a las deformaciones de cortante y axil, pero flexibles a las deformaciones de flexión. Se supone que están inmersos en un terreno elástico (tipo Winkler) con módulo de balasto  $k$ .

Con objeto de proyectar adecuadamente los apoyos y las juntas de la pasarela, es conveniente conocer el movimiento horizontal del nudo A1, para lo cual se pide:

Línea de influencia del movimiento horizontal, en mm, del nudo A1, bajo la actuación de una carga puntual descendente de 1 t. Las ordenadas de la línea de influencia se darán a cuartos de vano.

Notas: Se utilizarán las máximas simplificaciones posibles.

Módulo de elasticidad del hormigón,  $E = 4 \times 10^6 \text{ t.m}^{-2}$ .

Módulo de balasto del terreno,  $k = 50 \text{ Kg/m}^{-3}$ .

10.21. La estructura reticulada representada en la figura 10.36 corresponde al esquema simplificado de un puente pórtico cuyas características son las siguientes:

-Vano central, formado por una viga simétrica de sección ca-

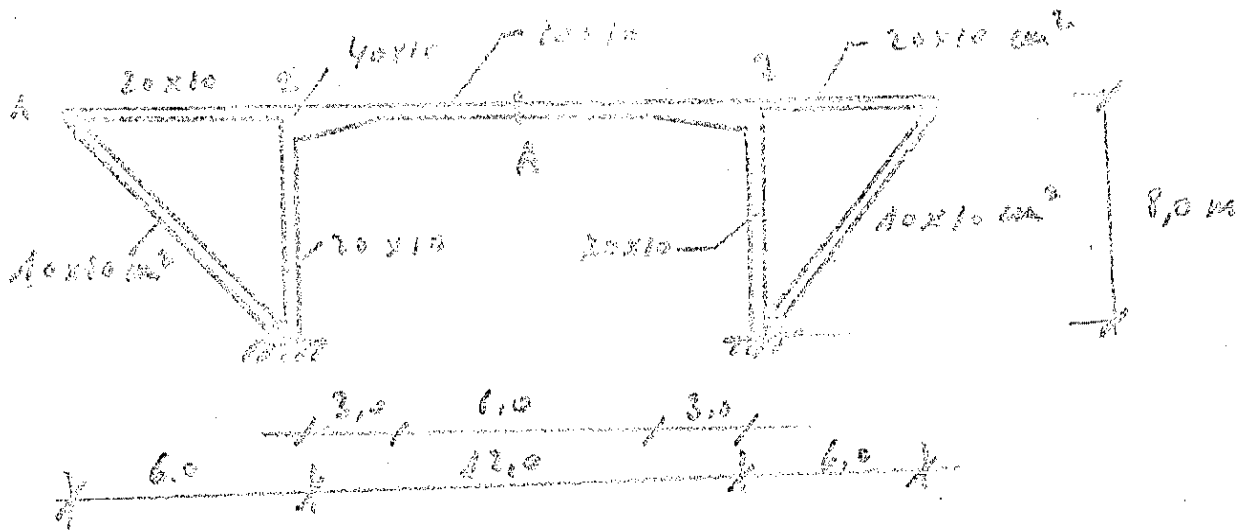
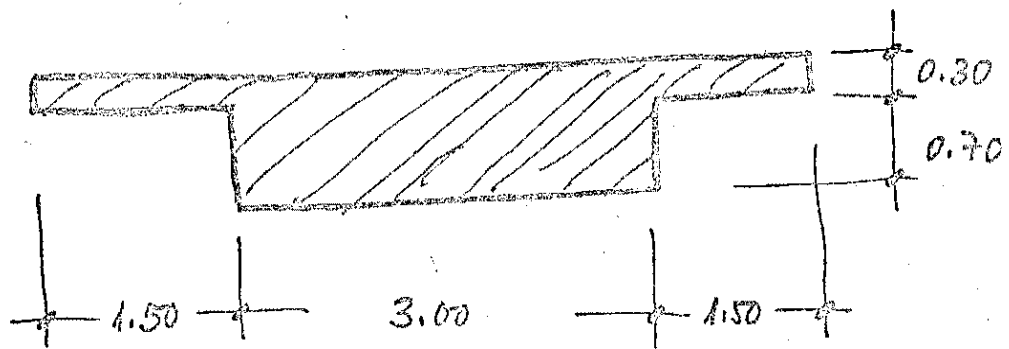
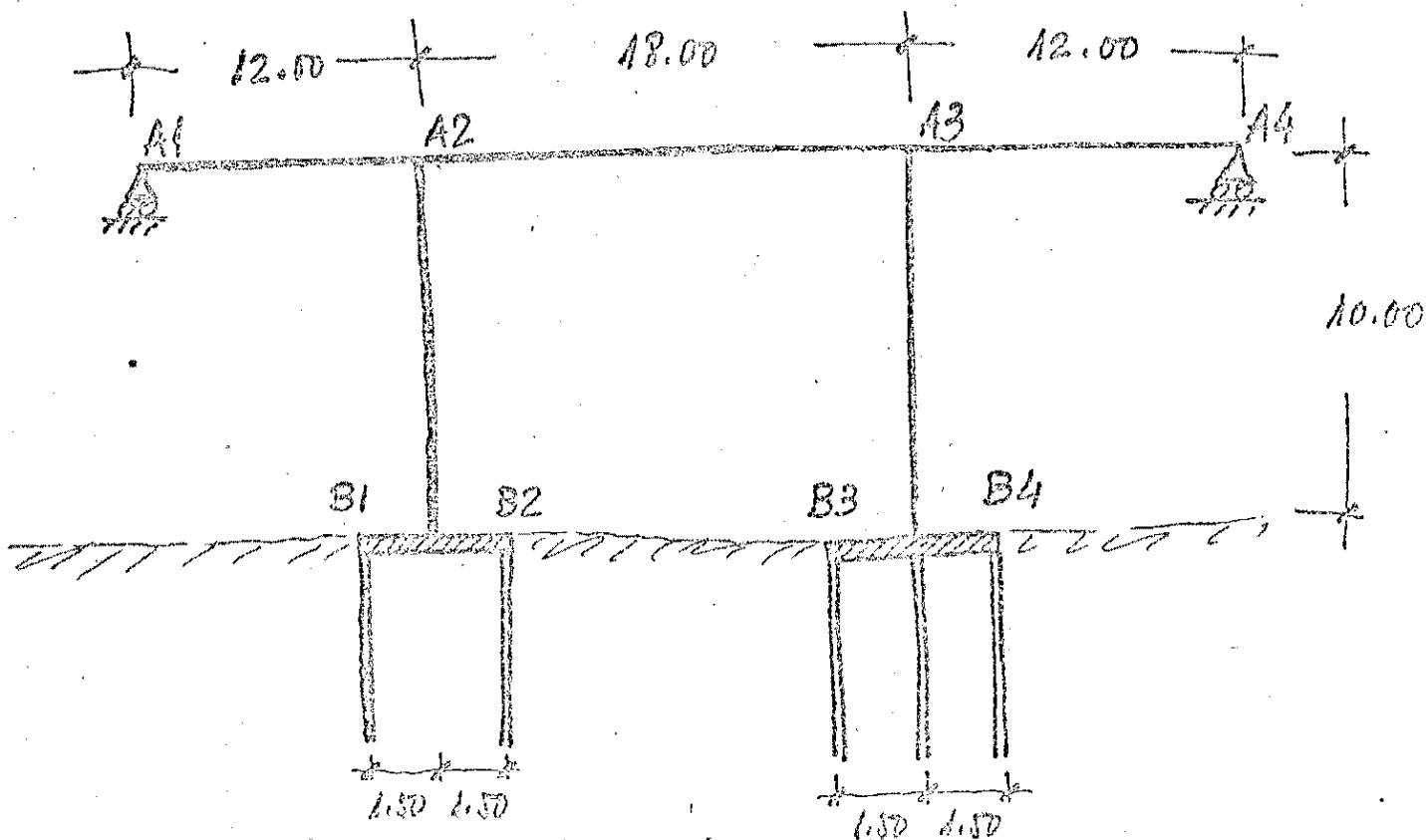


Figura 10.34. Ejercicio 10.19.



(a) Sección transversal.



(b) Entramado plano

Figura 10.35. Ejercicio 10.20.

jón, que consta de un tramo (B-B') de canto constante, cuya inercia es  $I = 2 \text{ m}^4$ , y dos tramos laterales (A-B y B'-A') - de canto variable, con inercia  $2I$  en arranques (A y A'). Por simplicidad, se supone lineal la variación de inercia en dichos tramos.

-Vanos laterales (A-C y A'-C') en los que se supone asimismo, por simplicidad, que la inercia varía de forma lineal entre  $1.5I$  (secciones C y C') y  $2I$  (secciones A y A').

-Soportes (A-D y A'-D') de inercia  $0.1 \text{ m}^4$ , biarticulados en ambos extremos.

-Tirantes (C-D y C'-D') de inercia despreciable y sección  $1 \text{ m}^2$ .

Las conexiones en los puntos A, A', D y D' se realizan mediante rótulas plásticas lineales de hormigón, tales que para un giro de una milésima de radián engendran un momento de  $7 \text{ m.t.}$

El módulo de deformación longitudinal del hormigón de todas las barras se adopta el valor  $2 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ , y se considera que todas ellas son inextensibles, a excepción de los tirantes C-D y C'-D'.

Deseando conocer el efecto exclusivo del tren de una Instrucción, se supone la actuación de una carga puntual móvil de  $60 \text{ t.}$  recorriendo el dintel C-C'.

Se pide:

- 1) Máximos momentos flectores positivos y negativos en la sección 0.
- 2) Reacciones en las rótulas D y D' en ambas situaciones.

Nota: Se justificarán todas las simplificaciones que se introduzcan.

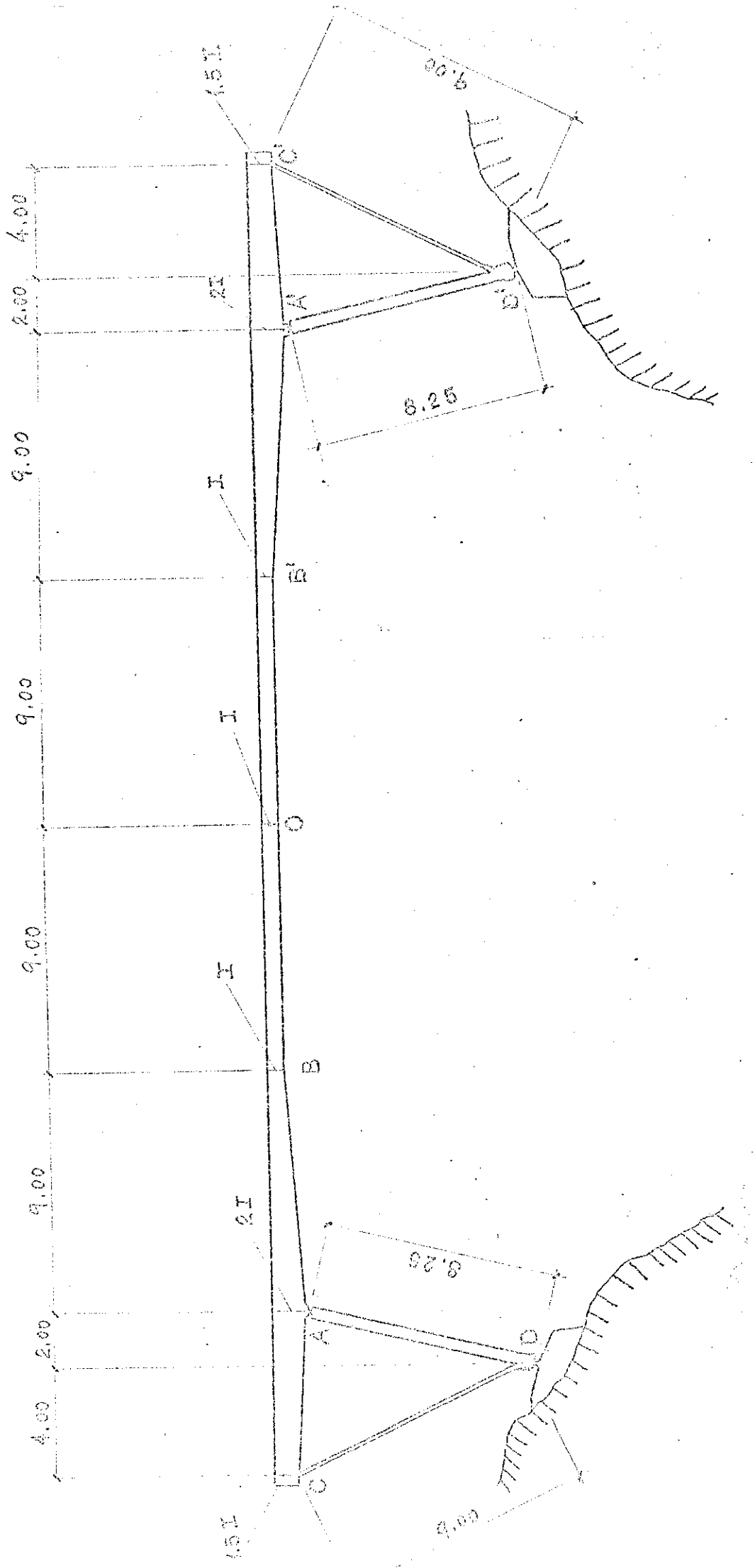


Figura 10.36. Ejercicio 10.21.

10.22. Se considera la estructura pórtico múltiple de la figura - 10.37, correspondiente a un viaducto en hormigón armado, y se desea dimensionar la sección A-A a esfuerzo cortante, - cuando una carga extraordinaria vertical descendente de 100 t recorre el tramo 1-2-3. A fin de simplificar el análisis se supone que se conocen los siguientes datos respuestas de la estructura de la derecha (figura 10.35b) cuando actúan las siguientes acciones unitarias sobre la citada sección B-B:

ACCION	DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL (u)	DESPLAZAMIENTO VERTICAL (v)	GIRO ( $\theta$ )
Fuerza horizontal X = 1 t.	4 mm.	3 mm.	$-2 \times 10^{-5}$ rad.
Fuerza vertical Y = 1 t.	----	8 mm.	$3 \times 10^{-5}$ rad.
Momento M = 1 mt.	----	-----	$40 \times 10^{-5}$ rad.

Los signos positivos de las acciones y movimientos anteriores se representan en la figura 2.

Se pide:

Determinar los esfuerzos cortantes máximo y mínimo en la sección A-A, y posiciones de la carga de 100 t que lo produce.

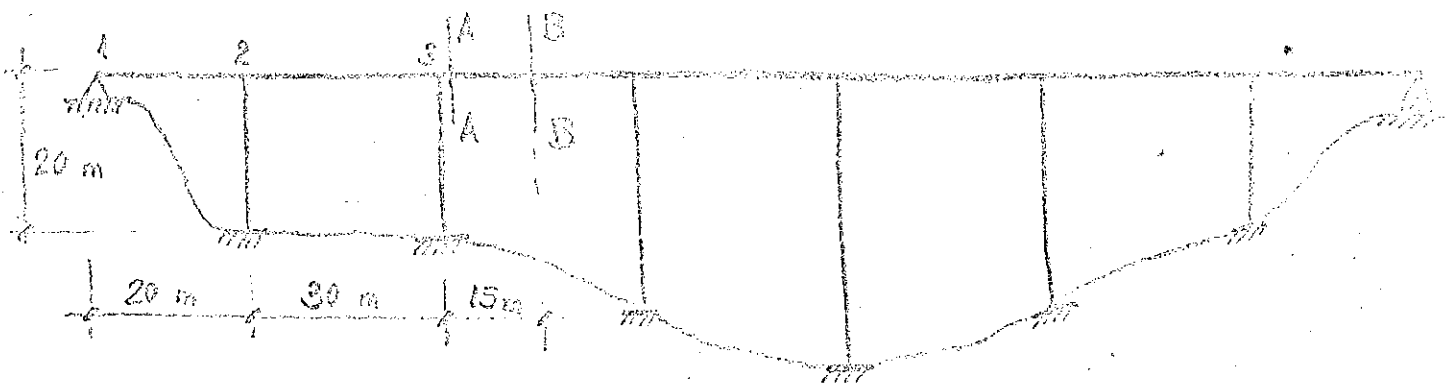
Todas las barras se suponen, en este cálculo preliminar, de - sección constante rectangular:

Dintel: Ancho = 12,00 m. Canto = 2,00 m.

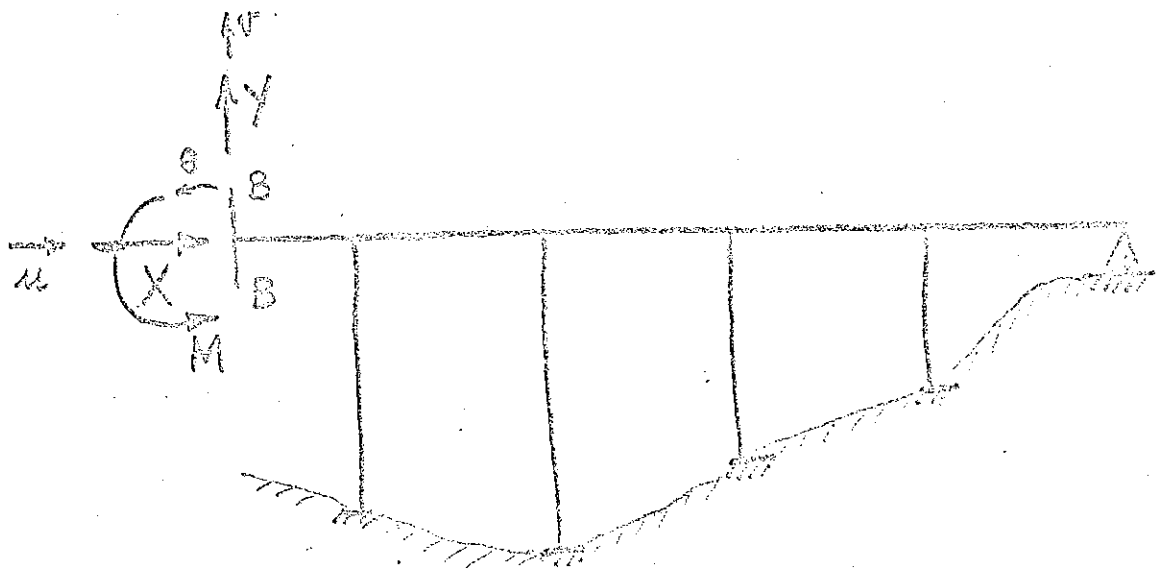
Pilas : Ancho = 9,00 m. Canto = 1,00 m.

Módulo de elasticidad del hormigón,  $E = 3 \times 10^6 \text{ t.m}^{-2}$ .

Nota: Este ejercicio sirve para ilustrar las posibilidades indicadas en el ejercicio 9.24.



(a)



(b)

Figura 10.35. Ejercicio 10.22.

10.23. Determinar la línea de influencia del momento flector en el apoyo  $n$  y en la sección central del vano  $i$ , en una viga continua de  $N$  vanos iguales de luz  $L$  y con vigas de características cada una de ellas  $R_1 = R_2 = R$  y  $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma$ .

Caso particular:  $n = 2$ ,  $x = 1$  y  $N \rightarrow \infty$ .



EJERCICIOS. SOLUCIONES

10.2.  $\mu_A^+ = -0,77 + 1,05 = 0,28 \text{ mt.}$

$\mu_A^- = -0,77 - 7,21 = -7,98 \text{ mt.}$

$\mu_B^+ = -0,76 + 1,79 = 1,03 \text{ mt.}$

$\mu_B^- = -0,76 - 7,87 = -8,63 \text{ mt.}$

$\mu_C^+ = -1,00 + 2,02 = 1,02 \text{ mt.}$

$\mu_C^- = -1,00 - 10,02 = -11,02 \text{ mt.}$

$\mu_D^+ = 0,41 + 5,76 = 6,17 \text{ mt.}$

$\mu_D^- = 0,41 - 2,48 = -2,07 \text{ mt.}$

10.4. Línea de influencia de  $M_A$

VANO/SECCION	x = 0	x = 1	x = 2	x = 3	x = 4
1-2	0,00	-0,19	-0,31	-0,27	0,00
2-B	0,00	-0,52	-0,93	-1,28	-1,58
B-3	-1,58	-1,10	-0,65	-0,27	0,00
3-C	0,00	0,19	0,35	0,49	0,62
C-4	0,62	0,44	0,27	0,12	0,00
4-5	0,00	-0,07	-0,08	-0,05	0,00

Se representa esta línea de influencia en la figura 10.38.

Línea de influencia de  $Q_A$

SECCION/VANO	x = 0	x = 1	x = 2	x = 3	x = 4
1-2	0,00	-0,05	-0,08	-0,07	0,00
2-B	-1,00	-0,88	-0,76	-0,68	-0,60
B-3	-0,60	-0,47	-0,34	-0,18	0,00
3-C	0,00	0,05	0,09	0,12	0,16
C-4	0,16	0,11	0,07	0,03	0,00
4-5	0,00	-0,02	-0,02	-0,01	0,00

Esta línea de influencia se muestra en la figura 10.39.

10.5. Los resultados finales del Cross para distorsiones unidad angular y de cortante son (método dual):

NUDO	2			3				4		DISTORSION
BARRA	2-1	2-3	2-6	3-2	3-7	3-4	4-3	4-8	4-5	
M	-6,7	10,5	-3,8	10,4	-7,8	-2,6	-2,5	0,9	1,6	Angular
M	-1,68	2,63	-0,95	2,60	-1,95	-0,65	-0,62	0,22	0,40	Cortante

Línea de influencia del momento flector:

Vano 1-2:  $v^1 = -0,013(16 - x^2)$   $0 \leq x \leq 4$

Vano 2-3:  $v^1 = -0,578x + 0,034x^2(2 - \frac{x}{6})$   $0 \leq x \leq 4$

$v^1 = -0,217y - 0,034y^2(2 - \frac{y}{6})$   $0 \leq y \leq 4$

con  $y = 8 - x$

vano 3-4:  $v^1 = 0,217x - 0,011x^2(2 - \frac{x}{6})$   $0 \leq x \leq 4$

$v^1 = 0,100y + 0,011x^2(2 - \frac{y}{6})$   $0 \leq y \leq 4$

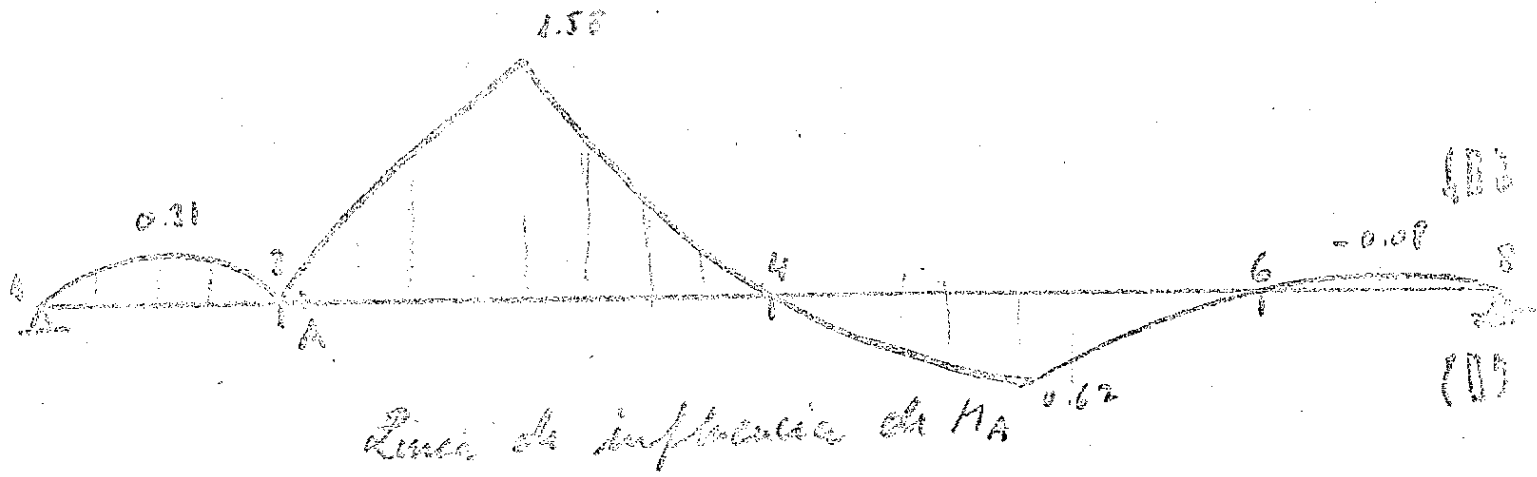


Figura 10.38. Solución del ejercicio 10.4.

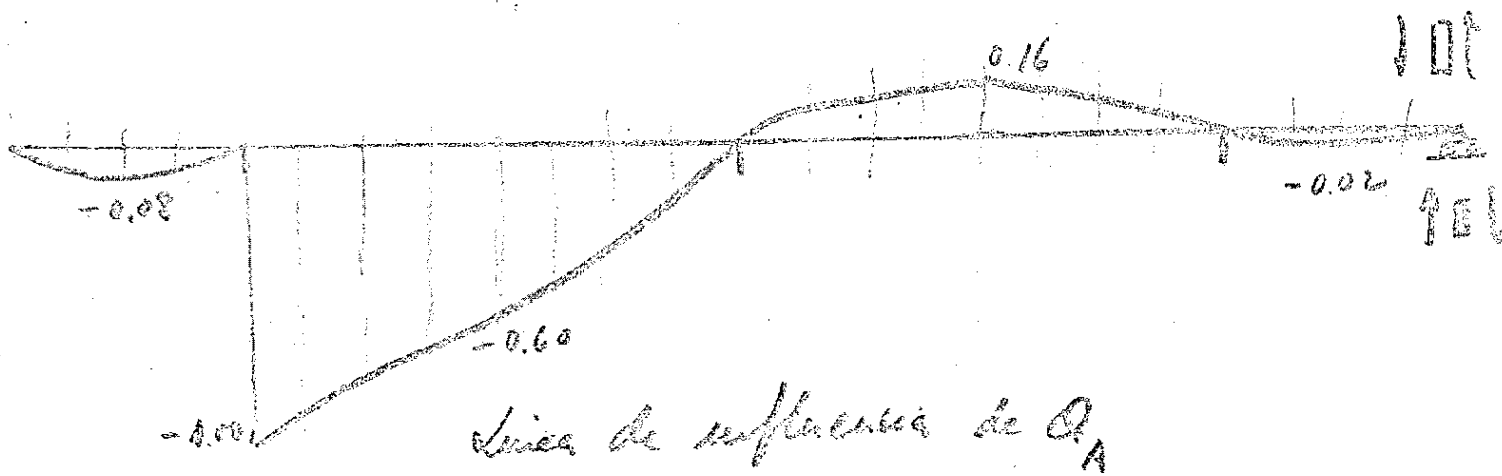


Figura 10.39. Solución del ejercicio 10.4.

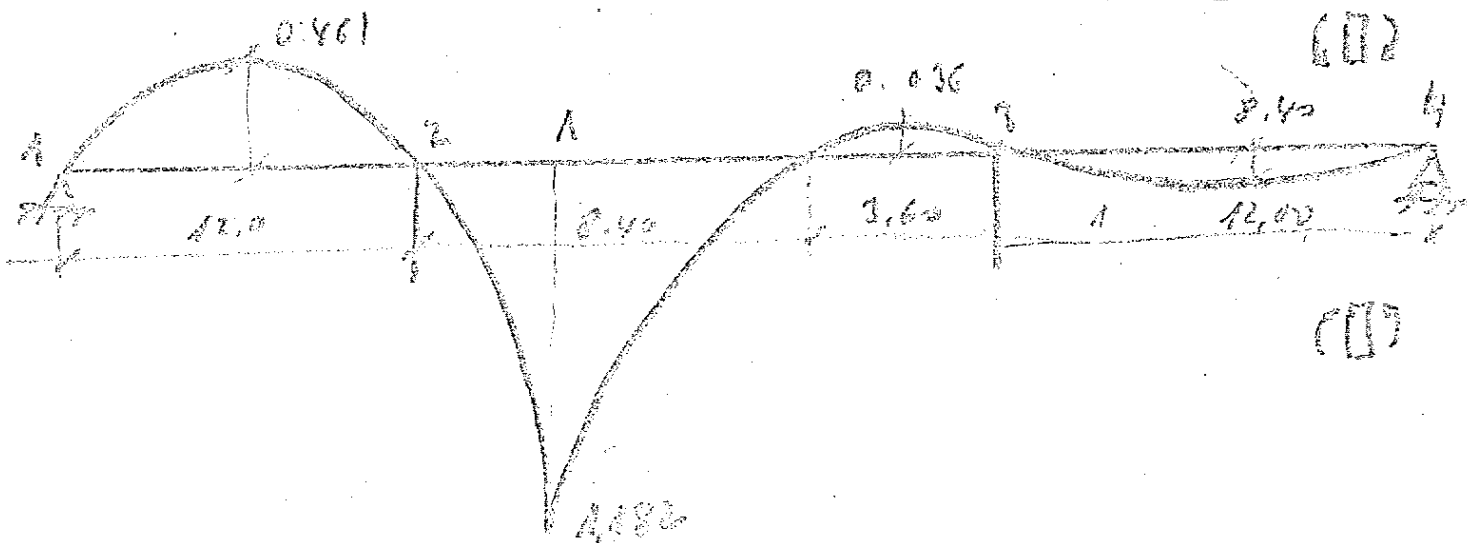


Figura 10.40. Solución del ejercicio 10.15.

con

$$y = 8 - x$$

$$\text{Vano 4-5: } v^1 = -0,0031x(32-12x+x^2)$$

$$0 \leq x \leq 4$$

Línea de influencia del esfuerzo cortante:

$$\text{Vano 1-2: } v^1 = -0,003x(16 - x^2)$$

$$\text{Vano 2-3: } v^1 = -1 + 0,019x - 0,0020x(8-x)(2x-8) + 0,015x^2(2 - \frac{x}{6}) \quad 0 \leq x \leq 4$$

$$v^1 = -0,071y + 0,0020y(8-y)(2y-8) - 0,015y^2(2 - \frac{y}{6}) \quad 0 \leq x \leq 4$$

$$\text{Vano 3-4: } v^1 = 0,054x - 0,028x^2(2 - \frac{x}{6}) \quad 0 \leq x \leq 4$$

$$v^1 = 0,024y + 0,028y^2(2 - \frac{y}{6}) \quad 0 \leq x \leq 4$$

$$\text{Vano 4-5: } v^1 = -0,0008x(32 - 12x + x^2) \quad 0 \leq x \leq 4$$

Estas líneas de influencia coinciden con las deducidas en el ejercicio anterior.

$$10.6. M_A^+ = 17,86 \text{ mt.}$$

$$M_A^- = -13,22 \text{ mt.}$$

$$A_A^+ = 16,7 \text{ t.}$$

$$Q_A^- = -3,3 \text{ t}$$

$$N_A^+ = 19,94 \text{ t.}$$

$$N_A^- = 0$$

10.7.

VANO / x/l	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
1	0,00	0,02	0,11	0,34	0,77
2	0,77	2,92	0,53	-0,62	-0,77
3	-0,77	-0,62	-0,44	-0,22	0,00

- 10.8. Para  $x = 2,00$  (sección A)  $\mu_A = 53,20$  mt.  
 Para  $x = 5,66$   $\mu_A = -65,00$  mt.

10.11.

$x =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$T_{36} =$	0	0,16	0,31	0,40	0,445	0,40	0,31	0,16	0

10.12.

$x/a =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_4 =$	0	-0,366	-0,411	0	1,215	0,325	-0,153	0,000	0,085	0,076	0,0

- 10.13.  $M_A^+ = 601,5$  mt.  $M_A^- = 0$

10.15. Ver figura 10.40.

- 10.16.  $\theta = -0,188 \cdot 10^{-4} x$  (Una recta).

10.17.

$x =$	0	5	10	15	20
$N_{BC} =$	0	-5,27	0	11,93	15,89

10.18. Línea de influencia del axil  $N_{12}$  en (t).

VANO	$x/l$	0,0	0,25	0,50	0,75	1,00
1		-104	-70	-36	-13	-11
2		-11	32	41	27	3
3		3	1	-0,4	-1	-3

10.19.

$x =$	0	3	6	9	12
$M_A =$	0,000	-0,439	0,000	0,403	1,464

(simétrico)

10.20. Ver figura 10.41.

10.21.  $M_{\min}^- = -6,5 \text{ mt.}$  (carga en C ó C').

$M_{\text{Max}} = 270,6 \text{ mt.}$  carga en 0.

Para el momento negativo:  $V_D = 66 \text{ t.}$   $H_D = -14,1 \text{ t.}$

$V_{D'} = -6 \text{ t.}$   $H_{D'} = 14,1 \text{ t.}$

Para el momento positivo:  $V_D = 30 \text{ t.}$   $H_D = 40,87 \text{ t.}$

$V_D = 30 \text{ t.}$   $H_{D'} = -40,87 \text{ t.}$

(Sentidos usuales de signos).

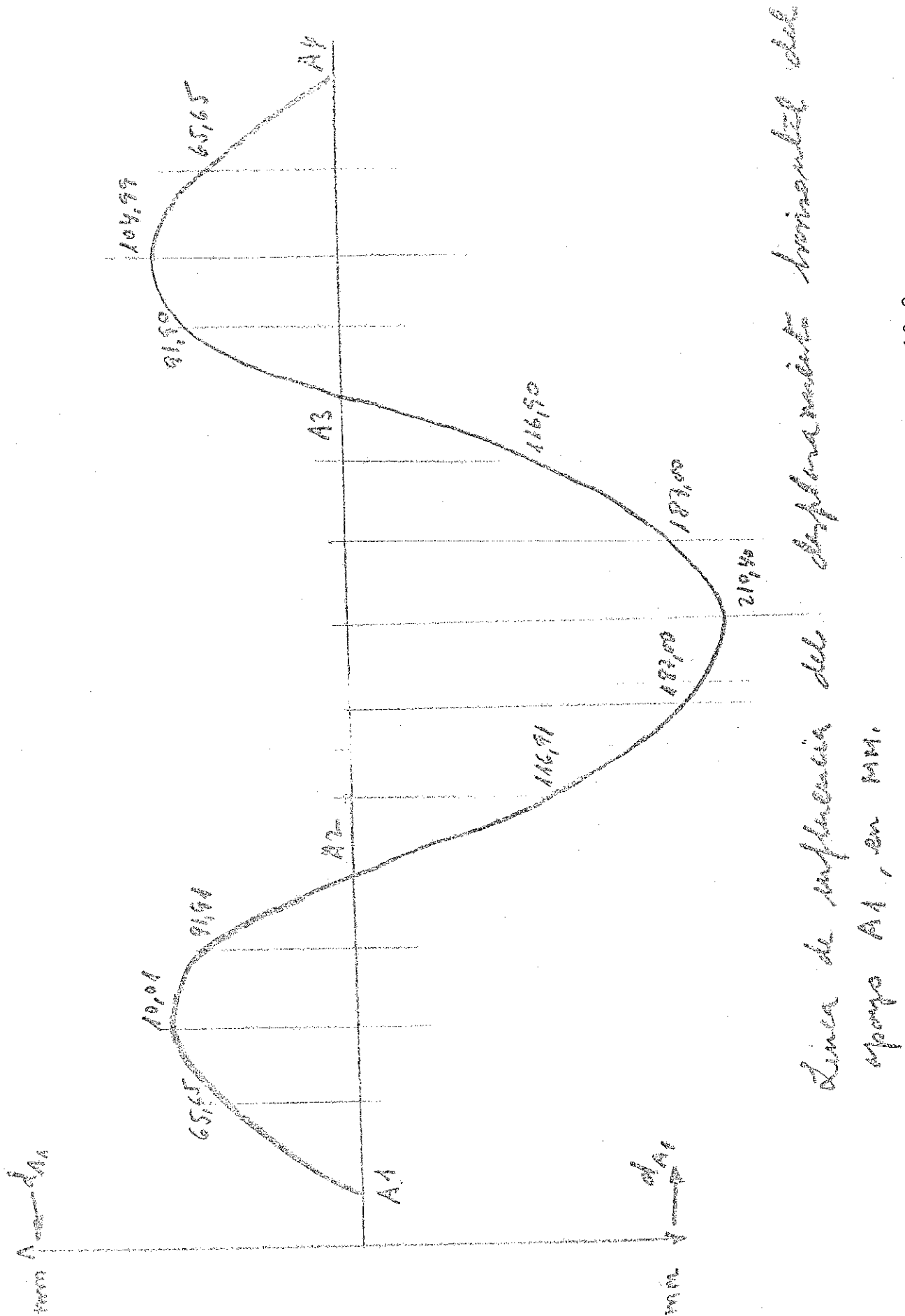


Figura 10.41. Solución del problema 10.2.

PUBLICACIONES DEL DEPARTAMENTO DE ANALISIS DE LAS ESTRUCTURAS  
CATEDRA DE CALCULO DE ESTRUCTURAS  
CATEDRA DE RESISTENCIA DE MATERIALES, ELASTICIDAD Y PLASTICIDAD

-Cálculo convencional de estructuras. Problemas.

Avelino Samartín, J.R. González de Cangas, Luis Moreno y Javier Torres. 246 Pág. (AE-79.1).

-Cálculo de estructuras elásticas geométricamente no lineales.

Avelino Samartín.

62 Pág. (AE-79.2).

-La viga columna.

Avelino Samartín.

54 Pág. (AE-79.3). *Educ. Ing. 1979*

-Cálculo matricial de estructuras. Problemas.

Avelino Samartín, J.R. González de Cangas, Luis Moreno y Javier Torres.

226 Pág. (AE-80.1).

-Un programa de generación automática de datos para el cálculo de emparrillados planos. (GEDE).

Fernando Martínez y Avelino Samartín.

135 Pág. (AE-80.2).

-Teoría elemental de vigas alabeadas. Aplicación a la viga balcón circular.

Avelino Samartín y J.R. González de Cangas.

36 Pág. (AE-80.3).

-Una contribución al estudio de hiperelementos finitos en flexión de placas.

Julian Díaz del Valle y Avelino Samartín.

392 Pág. (AE-80.4).



-Cálculo dinámico y teoría de placas. Problemas.

Avelino Samartín, J.R. González de Cangas, Luis Moreno y Javier Torres.

159 Pág. (AE-80.5).

-Cálculo convencional de estructuras. Problemas.

Avelino Samartín, J.R. González de Cangas, Luis Moreno y Javier Torres.

399 Pág. (AE-80.6).

-Cálculo matricial de láminas plegadas continuas, no prismáticas, de sección transversal arbitraria.

Jose Ramón González de Cangas y Avelino Samartín.

497 Pág. (AE-80.7).

-Cálculo de estructuras continuas: Volumen 1. Métodos generales: Estructuras 1-D y 2-D.

Avelino Samartín y J.R. González de Cangas.

229 Pág. (AE-80.8).

-Resistencia de Materiales. Tomo 1.

Rafael López González.

225 Pág. (AE-80.9).

-Resistencia de Materiales. Problemas. Tomo 1.

Rafael López González.

216 Pág. (AE-80.10).

-Resistencia de Materiales. Problemas. Tomo 2.

Rafael López González.

(AE-80.11).

-Resistencia de Materiales. Problemas. Tomo 3.

Rafael López González.

(AE-80.12).

-Plasticidad. Problemas.

Rafael López González.

(AE-80.13).

-Elasticidad. Problemas. Tomo 1.

Rafael López González.

(AE-80.14).

-Resistencia de Materiales. Tomo 2.

Rafael López González.

(AE-80.15).

-Diseño y cálculo plástico de estructuras. Tomo 1.

Rafael López González.

(AE-80.16).

-Diseño y cálculo plástico de estructuras. Tomo 2.

Rafael López González.

(AE-80.17).

-Influencia de los errores de ejecución en la carga crítica de pandeo de estructuras reticulares planas.

Germán Gutiérrez y Avelino Samartín.

395 Pág. (AE-81.1).

-Aportación al estudio de la respuesta dinámica de suelos estratificados en régimen no lineal.

Carlos Miragall y Avelino Samartín.

438 Pág. (AE-81.2).

-Cálculo convencional de estructuras.

Teoría. Estructuras articuladas.

Avelino Samartín y J.R. González de Cangas.

112 Pág. (AE-82.1).

-Cálculo convencional de estructuras.

Teoría. Estructuras reticuladas.

Avelino Samartín.

350 Páginas (AE-82.2.).